Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 39–60.

УДК 517.972

Е. М. Кузьменко

# УСЛОВИЯ K-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И ПОВТОРНОЙ K-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $\mathbf{W^{1,p}}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Для интегрантов $f(x,y,z)$ вариационных функционалов $\int_D f(x,y,y')dx$, действующих в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, над компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n$, вводятся классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$, изучавшиеся ранее в случае пространства Соболева $W^{1,2}$ над отрезком. Показано, что попадание интегранта в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную дифференцирумость соответствующего порядка для вариационного функционала.*

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева,компактная дифференцируемость, классы Вейерштрасса, доминантная смешанная гладкость .

## Введение.

Хорошо известно (см.например [1]), что вариационные функционалы в пространствах Соболева, как правило, не обладают обычными аналитическими свойствами. В работах И.В.Орлова и Е.В.Божонок [2], [3] для интегранта $f(x,y,z)$ одномерного вариационного функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$, действующего в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b]$, были введены так называемые классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$. Эти классы содержат псевдоквадратичные по $x$, $y$ интегранты $(f \in K_2(z))$, коэффициенты которых обладают доминантной по $z$ смешанной гладкостью нужного порядка (см.общее определение доминантной смешанной гладкости в [4]).

Оказалось, что попадание интегранта $f$ в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную дифференцируемость ($K$-дифференцируемость) соответствующего порядка для вариационного функционала. Заметим, что хотя $K$-дифференцируемость и слабее сильной дифференцируемости (она занимает промежуточное место между дифференцируемостью по Фреше и дифференцируемостью по Гато), но позволяет решать вариационные экстремальные задачи в пространствах Соболева [2], [3].

Естественной поэтому представляется постановка задачи о получении сходных условий компактной дифференцируемости в общих пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \geq 1$, над многомерной областью путем введения соответствующих классов Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

Отметим, что в нашей работе [5] недавно был введен в многомерном случае нулевой класс Вейерштрасса $WK_p(z)$ и показано, что при $f \in WK_p(z)$ вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, y')dx \qquad \big(D \subset \mathbb{R}^n,\, y(\cdot) \in W^{1,p}(D),\, p \geq 1\big)$$

является $K$-непрерывным.

## 1. Предварительные сведения.

Приведем общее определение компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости функционала в полном локально выпуклом пространстве (ЛВП).

**Определение 1.** Пусть $E$–полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$ . Скажем, что функционал $\Phi$ *компактно непрерывен, компактно дифференцируем (дважды $K$–дифференцируем и т.д.)* [2] в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение $\Phi$ на $(y + spanC)$, дифференцируемо по Фреше(дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке $y$ относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в пространстве $E_C = spanC$, порожденной $C$.

Обозначим далее через $\mathfrak{C}(E)$- систему всех абсолютно выпуклых компактов в $E$ и через $L_k(E)$- пространства $k$-линейных непрерывных форм на $E$. Выпишем в явной форме важные для нас в дальнейшем определения первой, второй и $n$–ной $K-$ производных:

$$\Phi(y + h_1) - \Phi(y) = \Phi'_K(y) \cdot h_1 + o(\|h_1\|_{C_1}) \ , \tag{1}$$

$$(\Phi'_K(y + h_1) - \Phi'_K(y)) \cdot h_2 = \Phi''_K(y) \cdot (h_1, h_2) + o(\|h_1\|_{C_1} \cdot \|h_2\|_{C_2}) \ , \tag{2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(\Phi^{(n-1)}(y+h_1)-\Phi^{(n-1)}(y))\cdot(h_2,\dots h_n) = \Phi_K^{(n)}(y)\cdot(h_1,h_2,\dots,h_n)+o(\|h_1\|_{C_1}\cdot\ldots\cdot\|h_n\|_{C_n}) \tag{3}$$

(для любых абсолютно выпуклых компактов $C_1\dots,C_n\in\mathfrak{C}(E)$).

## 2. Условия компактной дифференцируемости вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$.

В работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. [2], [3] был исследован вопрос об условиях $K$-непрерывности вариационного функционала Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx$$

в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b]=H^1[a,b]$. Оказалось, что достаточным условием $K$-непрерывности $\Phi(y)$ служит принадлежность интегранта $f$ к введенному в этих работах, классу Вейерштрасса $WK_2(z)$. В нашей работе [5] этот результат был обобщен на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, где $p\in\mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D\subset\mathbb{R}^n$. Было показано, что принадлежность интегранта $f$варициионного функционала

$$\Phi(y)=\int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx \qquad (y(\cdot)\in W^{1,p}(D),\, p\in\mathbb{N}) \tag{4}$$

к классу Вейерштрасса $WK_p(z)$ является достаточным условием $K$-непрерывности функционала (4). Приведем определение класса $WK_p(z)$.

**Определение 2.** Пусть функция $u=f(x,y,z)$, $f:\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to\mathbb{R}$ непрерывна. Скажем, что $f$ *принадлежит вейерштрассовскому классу* $WK_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, если $f$ допускает *псевдополиномиальное представление порядка* $p$:

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^p R_k(x,y,z)(z)^k, \tag{5}$$

коэффициенты $R_k:\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to L_k(\mathbb{R}_z^n)$ которого удовлетворяют условию *доминантной (по $x$, $y$) смешанной непрерывности ($C$-гладкости)* (см. общее определение пространств с доминантной смешанной гладкостью [4]): при любом выборе компактов $C_x\subset\mathbb{R}_x^n$, $C_y\subset\mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z\in\mathbb{R}_z$, отображения $R_k$ $(0\le k\le p)$ равномерно непрерывны и ограничены в $C_x\times C_y\times\mathbb{R}_z^n$.

Выражение вида (5) с приведенными выше условиями на коэффициенты $R_k$ мы назовем $K$-псевдополиномом порядка $p$.

Напомним также, что более слабое условие *доминантной (по $x$, $y$) смешанной ограниченности* коэффициентов $R_k$ в представлении (5), т.е. их ограниченности в областях $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z^n$, является достаточным условием корректной определенности функционала (4) в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$. Для получения достаточного условия компактной дифференцируемости функционала (4) введем более узкий класс Вейерштрасса $W^1K_p(z)$. Здесь мы также обобщаем определение класса $W^1K_2(z)$ введенное в работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. в случае одномерной области [2].

**Определение 3.** Пусть функция $u = f(x, y, z)$, $f : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Скажем, что отображение $f$ *принадлежит вейерштрассовскому классу* $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, если $f$ допускает представление (5), коэффициенты $R_k$ которого удовлетворяют *условию доминантной (по $x$, $y$) смешанной $C^1$-гладкости*: при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x^n$, $C_y \subset \mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z \in \mathbb{R}_z^n$, отображения $R_k(x, y, z)$ вместе с градиентами $\nabla R_k = \nabla_{yz} R_k$, $k = \overline{0, p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z^n$, независимо от выбора $z$.

**Замечание 2.** Отметим, что представление (5) функции $f \in W^1K_p(z)$ можно, не меняя общности рассуждений, заменить представлением

$$f(x, y, z) = \widetilde{R_0} + \widetilde{R_p} \cdot (z)^p \tag{6}$$

при сохранении требований определения 3.

*Доказательство.* Рассмотрим разложение единицы в $\mathbb{R}_z^n$ класса $C^1$: $1 = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, где, при некотором $M_z > 0$, малом $\varepsilon > 0$, $supp\, \varphi_1(z) \subset (|z| \le M_z)$, $supp\, \varphi_2(z) \subset (|z| \ge M_z - \varepsilon)$; $0 \le \varphi_1(z) \le 1$, $0 \le \varphi_2(z) \le 1$; $\varphi_1(z), \varphi_1'(z), \varphi_2(z), \varphi_2'(z)$ равномерно непрерывны и ограничены. Положим

$$\widetilde{R_0} = \left(\sum_{k=0}^{p} R_k \cdot (z)^k\right) \cdot \varphi_1(z),$$

$$\widetilde{R_p} = \left(\sum_{k=0}^{p} R_k \cdot (z)^{p-k}\right) \cdot \varphi_2(z).$$

Прямые вычисления показывают, что $\widetilde{R_k}$, $\nabla \widetilde{R_k}$, $k = \overline{0, p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $T = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n$.

. □

**Теорема 1.** *Пусть $u = f(x, y, z)$ есть отображение $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$; $x \in D$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}_z^n$, где $D$ — компактная область в $\mathbb{R}_x^n$. Если $f$ принадлежит классу $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D))$$

*K–дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$; при этом*

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h\right] dx \,\left(h \in W^{1,p}(D)\right) \ . \tag{7}$$

*Доказательство.* Проведем доказательство при $p > 1$.

1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset \mathfrak{C}(W^{1,p}(D))$. Воспользуемся каноническим представлением (5) для функции $f$:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_D = D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to L_k(T_D;\mathbb{R})$, согласно условию $f \in W^1K_p(z)$, таковы, что $R_k$ и $\nabla_{yz}R_k = \nabla R_k$ равномерно непрерывны и ограничены в $T_D$ локально по $x$,$y$ и глобально по $z$.

Как уже отмечалось (в аналогичной ситуации) в доказательстве теоремы 7 в [5], в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(D)$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta}_D = D \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}^n_z$ все коэффициенты $R_k$ вместе с матричными градиентами $\nabla R_k$ ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left|R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\right| \le M_{k0}\cdot\|\zeta\|^k, \left(M_{k0} < \infty, \quad k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T^{y,\Delta}_D,\, \zeta \in \mathbb{R}^n_z\right)$$

$$\left\|\nabla R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\right\| \le M_{k1}\cdot\|\zeta\|^k, \left(M_{k1} < \infty, \quad k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T^{y,\Delta}_D,\, \zeta \in \mathbb{R}^n_z\right). \tag{8}$$

Воспользуемся представлениями (25)–(26) из нашего доказательства теоремы о K-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ ([5], теор.7):

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \int\limits_D f(x,y+h,\nabla y + \nabla h)dx - \int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx = \sum_{k=0}^{p}\int\limits_D \Delta_k dx \ , \tag{9}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-1} C^l_k R_k(x,y+h,\nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l(\nabla h)^{k-l} +$$

$$+[R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h) - R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^k \ . \tag{10}$$

Преобразуем последнее выражение, учитывая, что

$$R_k(x,y+h,z+k) - R_k(x,y,z) = \nabla R_k(x,y,z)\cdot(h,k) + r_k(x,y,z;h,k)\cdot(h,k), \tag{11}$$

где $\|r_k(x,y,z;h,k)\| \to 0$ при $\|(h,k)\| \to 0$. Таким образом, подставляя (11) в (10) и выделяя в (10) последний член суммы (при $k \geq 2$) получаем:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{k[R_k(x, y+h, \nabla y+\nabla h) - R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^{k-1}\nabla h}_{B_k} +$$

$$+ \underbrace{\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{C_k} + \underbrace{r_k(x,y,\nabla y; h, \nabla h)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{D_k} +$$

$$+ \underbrace{kR_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\nabla h}_{E_k} \ . \tag{12}$$

Теперь дадим оценку для интегралов от каждого из слагаемых в этом выражении.
2) Используем оценку (31) для интегралов от $A_{kl}$ $\quad (l = \overline{0, k-2})$ полученную в нашем доказательстве теоремы о К-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ ([5], теор.7):

$$\left| \int\limits_D \left( \sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \ , \tag{13}$$

где $N_{kl}$ — константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}}.$$

Поскольку, ввиду компактности $C_\Delta$ в $W^{1,p}(D)$, $\|h\|_{W^{1,p}} \leq P \cdot \|h\|_{C_\Delta}$ при некоторой константе $P > 0$, то из (13) следует, с учетом ограниченности $\|h\|_{C_\Delta}$:
$\left| \int\limits_D \left( \sum\limits_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq$

$$\leq \left( \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P^{k-l} \cdot \|h\|_{C_\Delta}^{k-l-2} \right) \cdot \|h\|_{C_\Delta}^2 = o(\|h\|_{C_\Delta}) \ . \tag{14}$$

3) Проведем оценку интеграла $\int\limits_D B_k dx$ в (12) с помощью $\varepsilon$–процедуры, примененной в доказательстве теоремы 7 о К-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ [5]. Был получен следующий результат:
Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(\|h\|_{C_\Delta} \leq \delta) \Rightarrow \left( \int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \leq M_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k dx \right), \tag{15}$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ . \tag{16}$$

Замена в этой оценке $(\nabla y)^k \longrightarrow (\nabla y)^{k-1}\cdot\nabla h$ оставляет результат в силе с переходом $\|\nabla y\|^k \longrightarrow \|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|$ в неравенстве (15). Таким образом, в нашем случае получаем при $\|h\|_{C_\Delta}\le\delta(\varepsilon)$:

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| = \left|k\int\limits_D \Delta R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)dx\right| \le$$

$$\le k\cdot M_{k0}\cdot\int\limits_{e_\delta}\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx + k\cdot\varepsilon\cdot\int\limits_{e^\delta}\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx\ . \tag{17}$$

Отсюда, применяя к каждому из интервалов справа в (17) при $k>1$ неравенство Гёльдера-Минковского при $p'=\frac{p}{k-1}$, $q'=\frac{p}{p-k+1}$, получаем, с учетом оценки (16):

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \le k\cdot M_{k0}\cdot\left(\int\limits_{e_\delta}\|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\left(\int\limits_{e_\delta}\|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}}dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} +$$

$$+k\cdot\varepsilon\cdot\left(\int\limits_{e^\delta}\|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\left(\int\limits_{e^\delta}\|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}}dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \le$$

$$\le k\cdot M_{k0}\cdot\left(\varepsilon^{\frac{p}{k}}\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\|\nabla h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k+1}}} + k\cdot\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\cdot\|h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k+1}}} \le$$

$$\le k\cdot\left[M_{k0}\cdot\varepsilon^{\frac{k-1}{k}}+\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\right]\cdot N_{k1}\|h\|_{W^{1,p}} \le$$

$$\le\left(k\cdot\left[M_{k0}\cdot\varepsilon^{\frac{k-1}{k}}+\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\right]\cdot N_{k1}\cdot P\right)\|h\|_{C_\Delta} = o(\|h\|_{C_\Delta}) \tag{18}$$

при $\|h\|_{C_\Delta}<\delta(\varepsilon)$. Отметим, наконец, что при $k=1$ оценка правой части (17), ввиду отсутствия $\|\nabla y\|$, проводится очевидным образом, с учетом малости меры множества $e_\delta$.

4) Теперь проведем оценку интеграла от $C_k$ в (12). Заметим сначала, что оператор

$$\int\limits_D C_k dx = \int\limits_D\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k\right]dx$$

— линейный относительно $h$. Проверим его непрерывность. Заметим, что ввиду эквивалентности обычной нормы $\|(h,\nabla h)\|$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и нормы $\|(h,\nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}}$, выполнено неравенство

$$\|(h,\nabla h)\| \le F\cdot\|(h,\nabla h)\|_p,$$

где $F$–некоторая константа.

Имеем:

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \le \int\limits_D|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k|dx \le$$

$$\leq \int\limits_D \|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\| \cdot \|(h,\nabla h)\| \|(\nabla y)\|^k dx \leq F \cdot M_{k1} \int\limits_D (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}} \|(\nabla y)\|^k dx. \tag{19}$$

Применяя к интегралу справа в (19) неравенство Гёльдера-Минковского при $p' = p, q' = \frac{p}{p-1}$, получаем:

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \leq F \cdot M_{k1} \left[\int\limits_D (|h|^p + \|\nabla h\|^p))\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|\nabla y\|^k)^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \leq$$

$$\leq F \cdot M_{k1} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,\frac{kp}{p-1}}} \leq \left(F \cdot M_{k1} \cdot (S_k)^k \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}}\right) \cdot \|h\|_{W^{1,p}}, \tag{20}$$

где $S_k$ –константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{kp}{p-1}}} \leq S_k \cdot \|y\|_{W^{1,p}}$$

. Оценка (20) означает ограниченность линейного оператора $\int\limits_D C_k dx$ в $W^{1,p}(D)$.

5) Аналогично проводится оценка интеграла от $E_k$, который также является линейным оператором относительно $h$:

$$\left|\int\limits_D E_k dx\right| \leq k \int\limits_D |R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} (\nabla h)| dx \leq k \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^{k-1} \|\nabla h\| dx \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \left(\int\limits_D \|\nabla h\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\|\nabla y\|^{\frac{(k-1)p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,\frac{(k-1)p}{p-1}}} \leq \left[k \cdot M_{k0} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \cdot (S_{k-1})^{k-1}\right] \cdot \|h\|_{W^{1,p}}, \tag{21}$$

что означает ограниченность оператора $\int\limits_D E_k dx$ в $W^{1,p}(D)$.

6) Наконец, оценку интеграла от $D_k$ в (12), мы можем провести совершенно аналогично оценке интеграла от $B_k$ (в пункте 3 доказательства), поскольку для "$\varepsilon$–процедуры"существенен лишь факт стремления к нулю $r_k(x,y,z;h,\nabla h) \to 0$ при $\|(h,\nabla h)\| \to 0$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D \left[r_k(x,y,\nabla y; h,\nabla h) \cdot (h,\nabla h)(\nabla y)^k\right] dx\right| \leq$$

$$\leq \mu_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h,\nabla h)\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h,\nabla h)\| dx\Bigg)\ , \tag{22}$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}}, \tag{23}$$

$\mu_k$ — некоторая постоянная. Отсюда, применяя к каждому из интервалов справа в (22) неравенство Гёльдера-Минковского при $p' = \frac{p}{k}$, $q' = \frac{p}{p-k}$ , получаем, с учетом оценки (41):

$$\left|\int_D D_k dx\right| \le \mu_k \cdot \left(\int_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \cdot \left(\int_{e_\delta} \|(h,\nabla h)\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \cdot \left(\int_{e^\delta} \|(h,\nabla h)\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \le (\mu_k \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}})\|h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \le$$

$$\le (\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot \varepsilon \cdot T_k \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \le [(\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot T_k \cdot P] \cdot \varepsilon \cdot \|h\|_{C_\Delta} \qquad (24)$$

при $\|h\|_{C_\Delta} < \delta(\varepsilon)$. Здесь $T_k$ — константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \le T_k \cdot \|y\|_{W^{1,p}}.$$

Отсюда получаем

$$\left|\int_D D_k dx\right| = o(\|h\|_{C_\Delta}).$$

7) Резюмируя оценки, полученные выше в пунктах 2)–6), имеем:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int_D \Delta_k dx =$$

$$= \int_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\right]\right) dx +$$

$$+o(\|h\|_{C_\Delta}) \ , \qquad (25)$$

причем, интеграл справа в (25) является линейным непрерывным оператором от $h(\cdot) \in W^{1,p}(D)$. Таким образом, функционал $\Phi(y)$ K-дифференцируем в $W^{1,p}(D)$, и его K-дифференциал вычисляется по формуле:

$$\Phi'_K(y)h =$$

$$= \int_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\right]\right) dx \ . \qquad (26)$$

8) Покажем наконец, что равенство (26) можно преобразовать к стандартному виду (7). Из $K$-псевдополиномиального представления (5) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h = \frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y) \cdot h \cdot (\nabla y)^k \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h = \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h +$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right];$$

отсюда:

$$\nabla f(x,y,\nabla y)(h,\nabla h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h =$$
$$= \left[\frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h\right] + \sum_{k=1}^{p}\Big[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h\cdot(\nabla y)^k +$$
$$+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k\Big) + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big] =$$
$$= \nabla R_0(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h) +$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{p}\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right],$$

что совпадает с подинтегральным выражением в (26).
Итак, формула (26) принимает вид

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla h)\right]dx.$$

Теорема доказана. Случай $p=1$ может быть рассмотрен аналогичным образом.
. □.

## 3. Условия повторной компактной дифференцируемости вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$.

Для получения достаточного условия повторной компактной дифференцируемости введем следующий класс Вейерштрасса $W^2K_p(z)$, более узкий, чем класс $W^1K_p(z)$, рассматриваемый в п.2. Здесь мы также обобщаем определение класса $W^2K_p(z)$, введенное в работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. в случае одномерной области [2].

**Определение 4.** Пусть функция $u = f(x,y,z)$, $f:\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}^n_z\to\mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема. Скажем, что $f$ *принадлежит вейерштрассовскому классу* $W^2K_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, если $f$ допускает представление (5), коэффициенты $R_k:\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}^n_z\to L_k(\mathbb{R}^n_z)$ которого удовлетворяют *условию доминантной (по x, y) смешанной $C^2$–гладкости*: при любом выборе компактов $C_x\subset\mathbb{R}_x$ $C_y\subset\mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z\in\mathbb{R}^n_z$, отображения $R_k(x,y,\nabla y)$ вместе с градиентами $\nabla R_k = \nabla_{yz}R_k$ и гессианами $H(R_k) = H_{yz}(R_k)$, $k=\overline{0,p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $C_x\times C_y\times\mathbb{R}^n_z$, независимо от выбора $z$.

**Теорема 2.** *Пусть* $u = f(x, y, z)$ *есть отображение* $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$; $x \in D$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}_z^n$, *где* $D$ *— компактная область в* $\mathbb{R}_x^n$. *Если* $f$ *принадлежит классу* $W^2K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, *то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D))$$

*дважды* $K$*–дифференцируем всюду в пространстве* $W^{1,p}(D)$; *при этом*

$$\Phi_K''(y)(h,k) = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,\nabla y)[(h,\nabla k) + (\nabla h, k)] +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h, \nabla k)\Big]dx \qquad \big(h \in W^{1,p}(D)\big). \tag{27}$$

*Доказательство.*

1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. Воспользуемся, как и в теореме 1, $K$-псевдополиномиальным представлением для функции $f$:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_D = D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to L_k(T_D;\mathbb{R})$, согласно условию $f \in W^2K_p(z)$, таковы, что $R_k$, $\nabla_{yz}R_k$ и $H_{yz}(R_k)$ равномерно непрерывны и ограничены локально по $x$,$y$ и глобально по $z$ на $T_D$.

Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1 и теоремы 7 в [5], в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(D)$, числовые множества

$$K_h^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D) \ ,$$

$$K_k^{y,\Delta} := \bigcup_{k \in C_{\Delta_1}} (y+k)(D)$$

также компактны. Следовательно, на множествах $T_{D,h}^{y,\Delta} = D \times K_h^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ и $T_{D,k}^{y,\Delta} = D \times K_k^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ все коэффициенты $R_k$ вместе с матричными градиентами $\nabla R_k$ и блок-матричными гессианами $H(R_k)$ ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\Big|R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\Big| \le M_{k0}\cdot\|\zeta\|^k, \qquad \Big(M_{k0} < \infty,\ k = \overline{0,p};\quad (x,y,z) \in T_D^{y,\Delta},\quad \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big)$$

$$\Big\|\nabla R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\Big\| \le M_{k1}\cdot\|\zeta\|^k, \qquad \Big(M_{k1} < \infty,\ k = \overline{0,p};\ (x,y,z) \in T_D^{y,\Delta},\ \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big)$$

$$\Big\|H(R_k(x,y,z))\cdot(\zeta)^k\Big\| \le M_{k2}\cdot\|\zeta\|^k, \quad \Big(M_{k2} < \infty,\ k = \overline{0,p};\ (x,y,z) \in T_D^{y,\Delta},\ \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big). \tag{28}$$

Вычислим приращение вариационного функционала $\Phi'_K$ в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_\Delta$, $k \in C_{\Delta_1}$, используя равенство (26):

$$(\Phi'_K(y+s) - \Phi'_K(y))h = \sum_{k=0}^{p}\Big[\int\limits_D \nabla R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(h,\nabla h)(\nabla y+\nabla s)^k dx +$$

$$+k\cdot \int\limits_D R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(\nabla h)(\nabla y+\nabla s)^{k-1}dx\Big] -$$

$$-\sum_{k=0}^{p}\left[\int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)(\nabla y)^k dx + k\cdot \int\limits_D R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}dx\right] =$$

$$= \int\limits_D \sum_{k=0}^{p}\Big[\nabla R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(h,\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l}\right) +$$

$$+k\cdot R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l-1}\right) -$$

$$-\nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)(\nabla y)^k - k\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\Big]dx =: \int\limits_D \sum_{k=0}^{p}\Delta_k, \quad (29)$$

где $\Delta_k$ — выражения в квадратных скобках в предпоследнем выражении в (29). Фиксируем $k$ и преобразуем выражение $\Delta_k$:

$$\Delta_k = \Bigg(\nabla R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(h,\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l}\right) -$$

$$-\nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)(\nabla y)^k\Bigg) +$$

$$+k\cdot\Bigg(R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l-1}\right) -$$

$$-R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\Bigg) =$$

(из каждой суммы выделяем последний элементы, $k$-й и $(k-1)$-й соответственно)

$$= \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \nabla R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(h,\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l} +$$

$$+\nabla R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(h,\nabla h)(\nabla y)^k - \nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)(\nabla y)^k +$$

$$+k\sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l-1} +$$

$$+k\Big(R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} - kR_k(x,y,\nabla y)()^{k-1}(\nabla h)\Big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{[\nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s) - \nabla R_k(x, y, \nabla y)]\,(h, \nabla h)(\nabla y)^k}_{B_k} +$$

$$+ k \cdot \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_{k-1}^l R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}}_{A_{k-1,l}} +$$

$$+ \underbrace{k\,[R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s) - R_k(x, y, \nabla y)]\,(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{C_k} \;.$$

Преобразуем $B_k$ и $C_k$, учитывая, что

$$R_k(x, y+h, z+s) - R_k(x, y, z) = \nabla R_k(x, y, z) \cdot (h, s) + r_k(x, y, z; h, s) \cdot (h, s),$$

где $\|r_k(x, y, z; h, s)\| \to 0$ при $\|(h, s)\| \to 0$. Таким образом,

$$B_k = H(R_k(x, y, \nabla y))(s, \nabla s) + r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s),$$

$$C_k = \nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s) + q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s).$$

Выделяя из $\left(\sum\limits_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right)$ последний $(k-1)$-й член, а из $\left(\sum\limits_{l=0}^{k-2} A_{k-1,l}\right)$ последний $(k-2)$-й член, получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l} &+ \\
+ k \cdot \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s) &+ \\
+ k \cdot \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l R_k(x, y+k_1, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1} &+ \\
+ k \cdot (k-1) R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s) &+ \\
+ [H(R_k(x, y, \nabla y))(s, \nabla s) + r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)]\,(h, \nabla h)(\nabla y)^k &+ \\
+ k\,[\nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s) + q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)]\,(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}&.
\end{aligned} \qquad (30)$$

Вычитая и добавляя слагаемые:

$k \cdot \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)$ и $k \cdot (k-1) R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s)$,

получим:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ k \cdot \sum_{l=0}^{k-3} \underbrace{C_{k-1}^l R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}}_{A_{k-1,l}} +$$

$$+k\underbrace{[R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)-\nabla R_k(x,y,\nabla y)](h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)}_{V_k}+$$

$$+k(k-1)\underbrace{[R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)-\nabla R_k(x,y,\nabla y)](\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s)}_{W_k}+$$

$$+\underbrace{H(R_k(x,y,\nabla y))(s,\nabla s)(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{F_k}+$$

$$+\underbrace{[r_k(x,y,\nabla y;s,\nabla s)\cdot(s,\nabla s)]\,(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{E_k}+$$

$$+k\cdot\underbrace{\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{S_k}+$$

$$+k\cdot\underbrace{q_k(x,y,\nabla y;s,\nabla s)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{H_k}+$$

$$+k\underbrace{\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)}_{D_k}+k(k-1)\underbrace{R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla k)}_{G_k}\ . \tag{31}$$

Теперь дадим оценку для интегралов от каждого слагаемого в этом выражении.
2) Проведем вначале оценку для интегралов от $A_{kl}\quad (l=\overline{0,k-2})$. Поскольку, ввиду (28),

$$|A_{kl}|\le C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\|(h,\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l}\|\le C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l},$$

то

$$\left|\int\limits_D\left(\sum_{l=0}^{k-2}A_{kl}\right)dx\right|\le\sum_{l=0}^{k-2}C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\int\limits_D\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l}dx. \tag{32}$$

Применяя к интегралам справа в (32) неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left|\int\limits_D\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l}dx\right|\le$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\le F\cdot\left(\int\limits_D(\|h\|^p+\|\nabla h\|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_D\|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{k-l}{p}}\cdot\left(\int\limits_D\|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l-1}}dx\right)^{\frac{p-k+l-1}{p}}\le$$

(условие $\frac{1}{p}+\frac{p-k-l-1}{p}+\frac{k-l}{p}=1$ выполняется)

$$\le F\cdot(\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l}\cdot\left(\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l-1}}}\right)^l\cdot\|h\|_{W^{1,p}}\ , \tag{33}$$

где $F$ — некоторая константа. Далее, элементарно проверяется неравенство $\frac{pl}{p-k+l-1} \le p$, откуда следует неравенство для соответствующих соболевских норм:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l-1}}} \le S_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}} \ , \tag{34}$$

где $S_{kl}$ — постоянные. Отсюда получаем:

$$\left| \int\limits_D \left( \sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k1} \cdot F \cdot (S_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l}. \tag{35}$$

Поскольку

$$\|h\|_{W^{1,p}} \le P_h \|h\|_{C_\Delta}, \qquad \|s\|_{W^{1,p}} \le P_{k1} \|s\|_{C_\Delta},$$

то из (35) следует:

$$\left| \int\limits_D \left( \sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \le$$

$$\le \left( \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k1} \cdot F \cdot (S_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P_h \cdot P_{k1}^{k-l} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^{k-l-2} \right) \cdot \|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2 =$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2). \tag{36}$$

3) Аналогично пункту 2) доказательства теоремы о K-дифференцируемости оценим интегралы от $A_{k-1,l} \quad (l = \overline{0, k-3})$:

$$|A_{k-1,l}| \le C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \|(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}\| \le C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla s\|^{k-l-1},$$

откуда

$$\left| \int\limits_D \left( \sum_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l} \right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla\|^{k-l-1} dx. \tag{37}$$

Применяя к интегралам справа в (37) неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left| \int\limits_D \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla s\|^{k-l-1} dx \right| \le \left( \int\limits_D (\|\nabla h\|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int\limits_D \|\nabla s\|^p dx \right)^{\frac{k-l-1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left( \int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx \right)^{\frac{p-k+l}{p}} \le (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l-1} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \ . \tag{38}$$

Отсюда:

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l}\right) dx\right| \leq \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l-1} . \tag{39}$$

Поскольку

$$\|h\|_{W^{1,p}} \leq P_h \cdot \|h\|_{C_\Delta}, \quad \|s\|_{W^{1,p}} \leq P_{k1} \cdot \|s\|_{C_\Delta} \ ,$$

то из (35) следует: $\left|\int\limits_D \left(\sum\limits_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l}\right) dx\right| \leq$

$$\leq \left(\sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P_h \cdot P_{k1}^{k-l-1} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^{k-l-3}\right) \cdot \|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2 =$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2) \ . \tag{40}$$

4) Оценку $\int\limits_D V_k dx$ проведем с помощью $\varepsilon$–процедуры уже применявшейся нами в доказательстве теоремы о K-дифференцируемости, пункт 3. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta, \|s\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D V_k dx\right| \leq$$

$$\leq M_{k1} \cdot \int\limits_{e_\delta} \|(h, \nabla h)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla s\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|(h, \nabla h)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla s\| dx\Bigg)$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ . \tag{41}$$

Применяем неравенство Гельдера–Минковского и учитывая, что $\|(h, \nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}}$ и $\|(s, \nabla s)\|_p = (|s|^p + \|\nabla s\|^p)^{\frac{1}{p}}$, получаем:

$$\left|\int\limits_D V_k dx\right| \leq M_{k1} \cdot \Bigg(\int\limits_{e_\delta} (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx\Bigg)^{\frac{1}{p}} \cdot \Bigg(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\Bigg)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \Bigg(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla k_1\|^{\frac{p}{p-k}} dx\Bigg)^{\frac{p-k}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla s\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \leq$$

$$\leq M_{k1} \cdot \left(\varepsilon^{\frac{p}{k}}\right)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} + \varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot \|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \leq$$

$$\leq M_{k1} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{p}} \cdot T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} + \varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \leq$$

$$\leq [M_{k1} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{p}} \cdot T_{k1} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C\Delta} \|s\|_{C_\Delta}) + [\varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot T_{k1} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta})$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ ,$$

где $T_{k1}$ — константы связывающие соболевские нормы: $\|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \le T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}}$ .
5) Аналогично рассуждая, с помощью $\varepsilon$–процедуры получаем оценку $\int\limits_D W_k dx$:

$$\left|\int\limits_D W_k dx\right| \le M_{k0} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}} dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-2}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}} dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-2}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$\le \ldots \le [M_{k0} \cdot F \cdot \varepsilon^{\frac{k-2}{p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C\Delta} \|s\|_{C_\Delta}) + [\varepsilon \cdot F \cdot \|y\|^{k-2}_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) =$
$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta})$,
где $F$ — некоторая константа.
6) С помощью этой же процедуры проведем оценку $\int\limits_D E_k dx$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D \left[r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^k\right] dx\right| \le$$

$$\le \mu_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| dx\Bigg), \quad (42)$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ , \qquad (43)$$

$\mu_k$ — некоторая постоянная. Применяя неравенство Гельдера–Минковского и учитывая, что

$$\|(h, \nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad \|(s, \nabla s)\|_p = (|s|^p + \|\nabla s\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

получаем:

$$\int\limits_D E_k dx \le$$

$$\le \mu_k \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} ((\|h\| + \|\nabla h\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} ((\|s\| + \|\nabla s\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} ((\|h\| + \|\nabla h\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} ((\|s\| + \|\nabla s\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \le$$

$$\leq \mu_k \cdot \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} + \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[(\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot \varepsilon \cdot P_h \cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) = o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ .$$

7) Аналогично получим оценку $\int\limits_D H_k dx$:

$$\left|\int\limits_D \left[q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\right] dx\right| \leq$$

$$\leq \nu_k \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{k}} + \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot F_k \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[(\nu_k + F_k \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}})\varepsilon \cdot P_h \cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) = o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ .$$

8) Теперь проведем оценку интеграла от $F_k$. Докажем непрерывность билинейного оператора

$$\int\limits_D F_k dx = \int\limits_D \left[H(R_k(x, y, \nabla y)) \cdot (h, \nabla h) \cdot (s, \nabla s)(\nabla y)^k\right] dx.$$

Имеем:

$$\left|\int\limits_D F_k dx\right| \leq \int\limits_D |F_k|\, dx \leq \int\limits_D \left|H(R_k(x, y, \nabla y)) \cdot (h, \nabla h) \cdot (s, \nabla s)(\nabla y)^k\right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_D \|H(R_k(x, y, \nabla y))\| \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq M_{k2} \cdot \int\limits_D \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq$$

(применим неравество Гельдера–Минковского)

$$\leq M_{k2} \cdot \left[\int\limits_D (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|s\|^p + \|\nabla s\|^p) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \leq$$

$$\leq M_{k2} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,\frac{pk}{p-k-2}}} \leq M_{k2} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[M_{k2} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}).$$

Отсюда следует,что оператор $\int\limits_D F_k dx$ непрерывен. Аналогично рассуждая, дадим оценку интегралов $\int\limits_D S_k dx$, $\int\limits_D D_k dx$, $\int\limits_D G_k dx$ .

9) Оператор

$$\int\limits_D S_k dx = \int\limits_D \nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} dx$$

— билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D S_k dx\right| \le \int\limits_D |S_k|\, dx \le \int\limits_D \left|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\right| dx \le$$

$$\le \int\limits_D \left\|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\| \cdot \|(s,\nabla s)\| \cdot \|\nabla h\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1}\right| dx \le$$

$$\le M_{k1}\cdot\left[\int\limits_D \|\nabla h\|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|s\|^p + \|\nabla s\|^p) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{p(k-1)}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \le$$

$$\le \left[M_{k1}\cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}\right] (\|h\|_{C_\Delta}\cdot \|s\|_{C_\Delta}) \;.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D S_k dx$ непрерывен.

10) Оператор

$$\int\limits_D D_k dx = \int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla k_1) dx$$

также билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \le \int\limits_D \|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\|\cdot\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^{k-1}\|\nabla s\| dx \le$$

$$\le \ldots \le \left[M_{k1}\cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}\right] (\|h\|_{C_\Delta}\cdot \|s\|_{C_\Delta}) \;.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D D_k dx$ непрерывен.

11) Оператор

$$\int\limits_D G_k dx = \int\limits_D R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla k) dx$$

также билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D G_k dx\right| \le \int\limits_D \|R_k(x,y,\nabla y)\|\|\nabla h\|\|\nabla y\|^{k-2}\|\nabla s\| dx \le$$

$$\le \ldots \le \left[M_{k0}\cdot \|y\|^{k-2}_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}\right] (\|h\|_{C_\Delta}\cdot \|s\|_{C_\Delta}) \;.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D G_k dx$ непрерывен.

12) В итоге получаем:

$$\Phi''_K(y)(h,s) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Delta_k dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \Big[ \int\limits_D \left[ H(R_k(x,y,\nabla y))\cdot(h,\nabla h)\cdot(s,\nabla s)(\nabla y)^k\right] dx +$$

$$+k\cdot\int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}dx+$$

$$+k\cdot\int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)dx+$$

$$+k\cdot(k-1)\cdot\int\limits_D R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s)dx\Big]+o(\|h\|_{C_\Delta}\|s\|_{C_\Delta}) \qquad (44)$$

Покажем, что данное равенство можно преобразовать к стандартному виду:

$$\Phi''_K(y)(h,s)=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)[(h,\nabla s)+(\nabla h,s)]+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)\Big]dx\ . \qquad (45)$$

Из $K$-псевдополиномиального представления

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)z^k$$

находим:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s)+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+k(k-1)\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\Big]\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)(h,\nabla s)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k(h,\nabla s)+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s).$$

Отсюда находим гессиан:

$$H(f(x,y,\nabla y))(h,\nabla h)(k_1,\nabla k_1)=$$

$$=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)[(h,\nabla s)+(\nabla h,s)]+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)\right]=$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s) + \frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,\nabla s) +$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s) + \frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,s) +$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,s) +$$

$$+\frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s) + k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s) +$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s) + k(k-1)\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\Big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\underbrace{\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s) + \frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,\nabla s) +}_{F_k}$$

$$\underbrace{+\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,s) + \frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s)\Big]}_{F_k} +$$

$$+k\underbrace{\left[\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s) + \frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{D_k} +$$

$$+k\underbrace{\left[\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,s) + \frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{S_k} +$$

$$+k\cdot(k-1)\underbrace{\left[R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{G_k}.$$

Теорема доказана.

$\square$.

Автор выражает благодарность И.В.Орлову и Е.В.Божонок за полезные обсуждения и замечания.

## Список литературы

[1] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка* / [И.В.Скрыпник]. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[2] Орлов И.В. *Дополнительные главы современного естествознания.Вариационное исчисление в пространстве Соболева $H^1$: учебное пособие* / [И.В. Орлов, Е.В. Божонок]. — Симферополь:ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

[3] Орлов И.В. *Условия существования, $K$–непререрывности и $K$–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева $W_2^1$* / [И.В. Орлов, Е.В. Божонок] // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 63–78.

[4] Schmeisser Hans-Jurgen. *Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness.* / [Hans-Jurgen Schmeisser]. — Mathematical Institute, Praha, 2007. — PP.145–204.

[5] Кузьменко Е.М. *Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}(D)$ / [Е.М. Кузьменко] // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2010. — Т. 23(62), № 1. — С. 1-15.

[6] *Оптимальное управление* / [Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, Г.Г. Магарил-Ильяев и др. ]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[7] Березанский Ю.М. *Функциональный анализ.* / [Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель]. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.

[8] Гельфанд И.М. *Вариационное исчисление* / [И.М. Гельфанд, С.В. Фомин]. — М.: ФМ, 1961. — 230 с.

[9] Картан А. *Дифференциальное исчисление* / [А. Картан]. — М.: Мир, 1971. — 383 с.

**Умови $K$-диференційовності та повторной $K$-диференційовності варіаційних функционалів в просторі Соболєва $W^{1,p}$ функцій багатьох змінних.**

*Для інтегрантів $f(x,y,z)$ варіаційних функционалів $\int_D f(x,y,y')dx$, що діють в просторі Соболєва $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, над компактною областю $D \subset \mathbb{R}^n$, вводяться класи Вейєрштрасса $W^1K_p(z)$ та $W^2K_p(z)$, які досліджувалися раніше у випадку простору Соболєва $W^{1,2}$ над відрізком. Визначено, що попадання інтегранту до відповідного класу Вейєрштрасса гарантує компактну диференційовність відповідного порядку для варіаційних функционалів.*

Ключові слова: варіаційний функціонал, простір Соболєва, компактна диференційовність, класи Вейєрштрасса, домінантна мішана гладкість.

**Conditions of compact differentiability and repeated compact differentiability of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ of functions of several variables.**

*Weierstrass classes $W^1K_p(z)$ and $W^2K_p(z)$ which have been previously researched for the occasion of Sobolev space $W^{1,2}$ over segment are introduced for the integrands $f(x,y,z)$ of variational functionals $\int_D f(x,y,y')dx$, acting within of Sobolev space $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$ over the compact area $D \subset \mathbb{R}^n$. Belonging the integrant to the correspondent Weierstrass class is shown to guarantee compact differentiability of correspondent order for the variational functional.*

Keywords: variational functional, Sobolev space, compact differentiability, Weierstrass classes, dominating mixed smoothness.