Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 51–58.

УДК 517.955.8

И. В. Горохова

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ С НАГРУЖЕНЫМИ КОНЦАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого растянутого стержня под действием вязкого трения. На концах стержня сосредоточены массивные кольца, которые закреплены со стержнем шарнирно. Кольца могут двигаться перпендикулярно равновесному положению стержня с вязким трением. Описано расположение спектра такой задачи и получена асимптотическая формула для собственных значений.

Ключевые слова: краевые условия, собственные значения, операторный пучок, алгебраическая кратность.

Введение

Начиная с середины XX века в связи с революционным развитием науки и техники, в частности, с появлением космической техники, возникает необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач математической физики, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях (см. [1] – [5]). Различные виды краевых условий в отсутствие демпфирования рассмотрены в [6]. Также актуальность представляет влияние вязкого трения на изучаемые физические объекты. В предлагаемой работе рассмотрена краевая задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого демпфированного стержня с грузами на обоих концах. Исследования подобных задач с несущей массой на одном конце стержня проводились в [7] – [10].

Постановка задачи

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geqslant 0$, $g \in \mathbb{C}^1[0,l]$, находящегося под действием однородного вязкого трения, коэффициент которого $k > 0$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где x – координата, измеряемая от левого конца стержня, t – время, $u(x,t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого конца в момент времени t. На левом конце находится массивное кольцо массы $m_1 > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Кольцо со стержнем закреплено шарнирно. Такого рода закрепление описывается следующими условиями

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0} + m_1 \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} - g(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \alpha\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = 0, \tag{3}$$

На правом конце находится массивное кольцо массы $m_2 > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Краевые условия на правом конце имеют следующий вид

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \tag{4}$$

$$-\left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=l} + m_2 \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=l} + g(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} + \beta\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=l} = 0, \tag{5}$$

где $l > 0$ – длина стержня, $\alpha > 0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) левого кольца, $\beta > 0$ – коэффициент вязкого трения правого кольца. Условия (2) и (4) означают, что стержень соединен с кольцами шарнирно, а условия (4) и (5) описывают движения колец на концах стержня под действием вязкого трения.

После стандартного преобразования $u(x,t) = e^{i\lambda t}y(\lambda,x)$ получаем спектральную задачу

$$y^{(4)}(x) - \lambda^2 y(x) - (gy'(x))' + ik\lambda y(x) = 0, \tag{6}$$

$$y'''(0) - m_1\lambda^2 y(0) - g(0)y'(0) + i\lambda\alpha y(0) = 0, \tag{7}$$

$$y''(\lambda,0) = 0, \tag{8}$$

$$y''(\lambda,l) = 0, \tag{9}$$

$$-y'''(l) - m_2\lambda^2 y(l) + g(l)y'(l) + i\lambda\beta y(l) = 0. \tag{10}$$

Теоретико – операторная трактовка задачи

Дадим следующие определения.

Определение 1. Множество значений λ для которых обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$ существует как ограниченный замкнутый, называется резольвентным множеством, а дополнение к нему – спектром пучка $L(\lambda)$.

Определение 2. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением ([11], с. 61) пучка $L(\lambda)$, если существует вектор $y_0 \in \mathbb{D}(A)$ (называемый собственным вектором) такой, что $y_0 \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Векторы $y_1, ..., y_{p-1}$ называются цепочкой присоединенных к y_0 векторов, если

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} \frac{d^s L(\lambda)}{d\lambda^s}\Big|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad k = \overline{1, p-1}.$$

Число p называется длинной цепочки из собственного и присоединенных векторов. Геометрической кратностью собственного значения называется число соответствующих линейно независимых собственных векторов. Алгебраической кратностью собственного значения называется максимальное значение суммы длин цепочек, соответствующих линейно независимым собственным векторам. Собственное значение называется изолированным, если некоторая его проколотая окрестность принадлежит резольвентному множеству. Изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности называется нормальным, если образ $\mathrm{Im}L(\lambda_0)$ замкнут.

Для рассмотрения теоретико - операторной части задачи введем операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(0, l) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ согласно следующим формулам

$$\mathbb{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{l} y(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l), \\ y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \\ c_1 = y(0), \quad c_2 = y(l) \end{array} \right\},$$

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ y'''(0) \\ -y'''(l) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{D}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{l} y(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l), \\ y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \\ c_1 = -gy'(0), \quad c_2 = gy'(l) \end{array} \right\},$$

$$G \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(gy'(x))' \\ -gy'(0) \\ gy'(l) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где $M >> 0$, $K >> 0$. Под строгой положительностью подразумеваем, что существует такое $\varepsilon > 0$, при котором выполняются следующие неравенства $M \geqslant \varepsilon I$, $K \geqslant \varepsilon I$.

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda) = A - \lambda^2 M + G + i\lambda K$$

с областью определения $\mathbb{D}(L) = \mathbb{D}(A) \cap \mathbb{D}(K) \cap \mathbb{D}(G) = \mathbb{D}(A)$ по определению. Отметим, что эта область определения не зависит от спектрального параметра λ. Спектр пучка $L(\lambda)$ является спектром нашей задачи, поскольку, записав уравнение $L(\lambda)Y = 0$ покомпонентно, получим (6), (7), (7), а (8), (9) входят в описание $\mathbb{D}(A)$. Спектр краевой задачи (6) – (7) и пучка $L(\lambda)$ состоит из нормальных собственных значений, которые сгущаются только к бесконечности ([11], с. 27).

Лемма 1. *Оператор $\mathbb{A}$ самосопряженный, неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y \begin{pmatrix} y(x) \\ y(0) \\ y(l) \end{pmatrix} \in \mathbb{D}(A)$, а $Z \begin{pmatrix} z(x) \\ z(0) \\ z(l) \end{pmatrix}$, где $z(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l)$, тогда, учитывая, что $y''(0) = 0$, $y''(l) = 0$, получаем

$$(AY, Z) = \int_0^l y^{(4)}(x)\overline{z}(x)\,dx + y'''(0)\overline{z}(0) - y'''(l)\overline{z}(l) =$$

$$= y'''(l)\overline{z}(l) - y'''(0)\overline{z}(0) - \int_0^l y'''(x)\overline{z'}(x)\,dx + y'''(0)\overline{z}(0) - y'''(l)\overline{z}(l) =$$

$$= -y''(l)\overline{z}'(l) - y''(0)\overline{z}'(0) + \int_0^l y''(x)\overline{z}''(x)\,dx = \tag{11}$$

$$= y'(l)\overline{z}''(l) - y'(0)\overline{z}''(0) - \int_0^l y'(x)\overline{z}'''(x)\,dx = y'(l)\overline{z}''(l) - y'(0)\overline{z}''(0) -$$

$$-y(l)\overline{z}'''(l) + y(0)\overline{z}'''(0) + \int_0^l y(x)\overline{z}^{(4)}(x)\,dx.$$

Если мы положим

$$z''(0) = z''(l) = 0, \tag{12}$$

то $(AY, Z) = (Y, AZ)$, т.е. оператор A – самосопряженный.

Покажем, что оператор A неотрицателен. Для этого рассмотрим скалярное произведение (AY,Y). Полагая в (11) $z=y$ и учитывая условия (12), получаем

$$(AY,Y)=\int\limits_0^l |y''(x)|^2\,dx\geqslant 0.$$

Лемма 2. *Оператор* $\mathbb{G}$ *симметричен.* $G\geqslant 0$ $(G\leqslant 0)$ *при* $g(x)\geqslant 0$ $(g(x)\leqslant 0)$.

Доказательство. Пусть $Y\in\mathbb{D}(A)=\mathbb{D}(G)$, $Z\in\mathbb{D}(A)=\mathbb{D}(G)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(GY,Z)=-\int\limits_0^l (g(x)y'(x))'\overline{z}(x)\,dx-g(0)\overline{z}(0)y'(0)+g(l)\overline{z}(l)y'(l)=-g(l)\overline{z}(l)y'(l)+$$

$$+g(0)\overline{z}(0)y'(0)+\int\limits_0^l g(x)y'(x)\overline{z'}(x)\,dx-g(0)\overline{z}(0)y'(0)+g(l)\overline{z}(l)y'(l)=$$

$$=g(l)\overline{z'}(l)y(l)-g(0)\overline{z'}(0)y(0)-\int\limits_0^l (g(x)\overline{z'}(x))'y(x)\,dx=(Y,GZ).$$

Оператор G симметричен. Кроме того,

$$(GY,Y)=\int\limits_0^l g(x)|y'(x)|^2\,dx\geqslant 0$$

при $g(x)\geqslant 0$ и $(GY,Y)\leqslant 0$, если $g(x)\leqslant 0$.

Предложение. Спектр пучка лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Этот результат следует из [12] для пучка ограниченных операторов, но доказательство остается справедливым и для случая пучка неограниченных операторов (см., например, [13]).

Асимптотика собственных значений

Рассмотрим асимптотику собственных значений задачи (6) – (7). Будем считать, что $g=const$. Фундаментальная система решений уравнения (6) $y_k(\lambda,x)$ $(k=1,2,3,4)$ задается условиями: $y_k^{(n-1)}(\lambda,0)=\delta_{k,n}$, $(k,n=1,2,3,4)$, $\delta_{k,n}=1$ при $k=n$ и $\delta_{k,n}=0$, при $k\neq n$. Прямое вычисление показывает, что

$$S_1(\lambda,x)=\frac{z_1^2\mathrm{ch}(z_2x)}{z_1^2-z_2^2}-\frac{z_2^2\mathrm{ch}(z_1x)}{z_1^2-z_2^2}, \tag{13}$$

$$S_2(\lambda,x)=\frac{z_1^2\mathrm{sh}(z_2x)}{z_2(z_1^2-z_2^2)}-\frac{z_2^2\mathrm{sh}(z_1x)}{z_1(z_1^2-z_2^2)}, \tag{14}$$

$$S_4(\lambda,x)=\frac{\operatorname{sh}(z_1x)}{z_2(z_1^2-z_2^2)}-\frac{\operatorname{sh}(z_2x)}{z_1(z_1^2-z_2^2)}, \qquad (15)$$

$$z_1=\sqrt{\lambda}\left(1+\frac{g}{4\lambda}-\frac{ik}{4\lambda}\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad (16)$$

$$z_1=i\sqrt{\lambda}\left(1-\frac{g}{4\lambda}-\frac{ik}{4\lambda}\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (17)$$

Будем искать решение задачи в виде

$$y(\lambda,x)=A_1S_1(\lambda,x)+A_2S_2(\lambda,x)+A_3S_3(\lambda,x)+A_4S_4(\lambda,x). \qquad (18)$$

Подставим (18) в краевые условия (7) – (7) и получим следующую систему уравнений

$$A_1S_1''(l)+A_2S_2''(l)+A_4S_4''(l)=0, \qquad (19)$$

$$A_4-gA_2+A_1(i\alpha\lambda-m_1\lambda^2)=0, \qquad (20)$$

$$-A_1S_1'''(l)-A_2S_2'''(l)-A_4S_4'''(l)+g(A_1S_1'(l)+A_2S_2'(l)+A_4S_4'(l))+ \qquad (21)$$
$$+(i\lambda\beta-m_2\lambda^2)(A_1S_1(l)+A_2S_2(l)+A_4S_4(l))=0.$$

Система имеет нетривиальное решение, когда детерминант матрицы равен нулю, т.е., когда

$$\begin{vmatrix} S_1''(l) & S_2''(l) & S_4''(l) \\ i\alpha\lambda-m_1\lambda^2 & -g & 1 \\ -S_1'''(l)+gS_1'(l)+S_1(l)(i\lambda\beta-m_2\lambda^2) & -S_2'''(l)+gS_2'(l)+S_2(l)(i\lambda\beta-m_2\lambda^2) & -S_4'''(l)+gS_4'(l)+S_4(l)(i\lambda\beta-m_2\lambda^2)\end{vmatrix}=0.$$

Используем (13) – (15), тогда из последнего равенства получим

$$\frac{\lambda^4m_1m_2\operatorname{sh}(z_1l)\operatorname{sh}(z_2l)}{z_1z_2}+\frac{\lambda^2(m_1+m_2)z_1z_2}{z_1^2-z_2^2}(z_2\operatorname{sh}(z_1l)\operatorname{ch}(z_2l)-$$
$$-z_1\operatorname{sh}(z_2l)\operatorname{ch}(z_1l))+\frac{z_1^3z_2^3(z_1^2+z_2^2)\operatorname{sh}(z_1l)\operatorname{sh}(z_2l)}{(z_1^2-z_2^2)^2}+ \qquad (22)$$
$$+\frac{2z_1^4z_2^4(1-\operatorname{ch}(z_1l)\operatorname{ch}(z_2l))}{(z_1^2-z_2^2)^2}-\frac{i\lambda^3(\alpha m_2+\beta m_1)\operatorname{sh}(z_1l)\operatorname{sh}(z_2l)}{z_1z_2}=0.$$

Найдем асимптотику корней уравнения (22). Для этого подставим в него (16) – (17) и формулу

$$\lambda=\frac{\pi n}{l}+A+\frac{B}{n}+\frac{C}{n^2}+\frac{D}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Тогда, приравнивая нулю коэффициенты перед степенями $1/n$, в полученном таким образом уравнении, получаем асимптотическую формулу

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2}+\frac{ik}{2}+\frac{g}{2}+\frac{1}{l}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2-\frac{lg}{2\pi^2n^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi^2n^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2+\frac{l^2}{16\pi^2n^2}\left(k^2-g^2\right)+\frac{1}{6\pi^2n^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^3- \qquad (23)$$
$$-\frac{ilk}{\pi^2n^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{lg}{8}\right)+\frac{il}{\pi^2n^2}\left(\frac{\alpha}{m_1^2}+\frac{\alpha+\beta}{m_1m_2}+\frac{\beta}{m_2^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Выводы

В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузами на обоих концах, находящегося под влиянием вязкого трения. Описана теоретико – операторная трактовка этой задачи. Доказано, что оператор $\mathbb{A}$ самосопряженный, неотрицательный и оператор $\mathbb{G}$ симметричен. Показано, что спектр пучка $\mathbb{L}(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Получена асимптотическая формула (23), с помощью которой по спектру задачи последовательно можно найти параметры l, k, g, m_1, m_2, α, β, т.е. решить обратную задачу в случае $g = const$.

Автор выражает благодарность В.Н. Пивоварчику за постановку задачи.

Список литературы

[1] Miloslavsky A.I. *On instability of linear pipes* . Kharkov. –1980 .– P. 38 – 47. (Dinamika system, nesushikh podvizhnuju raspredelennuju nagruzku: Collected papers, Kharkov aviation institute.)

[2] Pivovarchik V.N. *Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping* // Moscow University Bulletin. –1987. –V. 42. – P. 68 – 71.

[3] Griniv R.O., Shkalikov A.A. *On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping* // Matematicheskii zametki. – 1994 . – V. 56, №2. –P. 114 – 131.

[4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости.* // Труды СПб. матем. об–ва. – 1998. – С. 3 – 33.

[5] Adamyan V., Pivovarchik V., Tretter C. *On a class of non-self-adjoint quadratic matrix quadratic operator pencils arising in elasticity theory* // J. Operator Theory. – 2002. – V. 47. – P. 325 – 341.

[6] Коллатц Л. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).* – М. : Наука. – 1968. – 504 С.

[7] Amara J.B. *Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions* // Functional Analysis and its Applications V. Kadets and W. Zelazko. – 2004. – V. 197. – P. 49 – 58. (North-Holland Mathematics Studies.)

[8] M. Möller, V. Pivovarchik *Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation* // Zeitschrift f ur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. (2006), 341 – 366 P. (European Mathematical Society. V. **25**)

[9] А.В. Яковлев *Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце* // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. – Т.2, №15 (54) (2006), С. 105 –114.

[10] Gorokhova I. V. *Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – 5 : 4. – P. 375 – 385.

[11] М.А. Наймарк *Линейные дифференциальные операторы.* М. : Наука. – 1969. – 512 С.

[12] M.G. Krein, H. Langer *On sone mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua* – I, II // I bid. – 1 (1978), 364 – 399 P., 539 – 566 P.

[13] V.N. Pivovarchik *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils wiht onedimensional linear part* // Укр. матем. ж. – 2007. – Т.59, 702 – 715 P.

Асимптотика власних значень стержня з навантаженими кінцями під дією в'язкого тертя

Розглянуто спектральну задачу, пов'язану з описом малих поперечних коливань пружного розтягнутого стержня під дією в'язкого тертя. На кінцях стержня зосереджені масивні кільця, які закріплені зі стержнем шарнірно. Кільця можуть рухатися перпендикулярно рівноважному положенню стержня з в'язким тертям. Описано розташування спектру такої задачі і отримана асимптотична формула для власних значень.

Ключові слова: краєві умови, власні значення, операторна в'язка, алгебраїчна кратність.

An eigenvalue asymptotic of the rod with the loaded ends under the viscous friction

A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic stretched rod under viscous friction is considered. There are massive rings at the ends of the rod with a hinge joint. The rings can move orthogonally to equilibrium position of the rod with viscous friction. Location of the spectrum of such a problem is described and asymptotic formula for the eigenvalues is provided.

Keywords: eigenvalues, operator pencil, algebraic multiplicity, boundary conditions.