

А. А. КОРНУТА

СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ФЛАТТО–ВИНЕР ГРУПП E_6, E_7

*Пусть G конечная группа симметрий, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей в вещественном пространстве E^n .
Найдены алгебры инвариантов Флатто-Винер групп E_6 и E_7 .*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в вещественном пространстве E^n введена прямоугольная система координат Ox_i ; G — неприводимая конечная группа, порождённая ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей, I^G — алгебра инвариантов группы G .

Согласно теореме Шепарда–Тодда–Шевалле [1,2] алгебра I^G порождена n алгебраически независимыми однородными многочленами $I_{m_i}^G$ степеней m_i ($i = \overline{1, n}$). В связи с этим возникает задача разработки методов построения и изучения свойств базисных инвариантов $I_{m_i}^G$. Эта задача нашла изучение в работах многих отечественных и зарубежных авторов [3–7].

Одно из направлений данных исследований указали Л. Флатто и М. Винер, установившие связь дифференциальных уравнений с построением базисных инвариантов алгебр I^G .

Флатто и Винер [8] доказали, что существуют, с точностью до постоянного множителя, базисные инварианты $I_{m_k}^G(x)$ алгебры I^G ($x = (x_i)$, $i = \overline{1, n}$), удовлетворяющие уравнениям

$$I_{m_j}(\partial) I_{m_k} = 0 \quad (1 \leq j < k),$$

где $I_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $I_{m_j}(\partial)$ — дифференциальный оператор, полученный из многочлена

$I_{m_j}(x)$ заменой x_i на $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Это утверждение даёт практический способ построения базисных инвариантов конечных групп. При решении данной задачи уже найдены системы базисных инвариантов Флатто–Винер групп $H_2(r)$, A_3 , A_4 [9], F_4 [10], E_8 [11].

Цель настоящей заметки построить системы базисных инвариантов Флатто–Винер групп E_6 и E_7 , порождённых отражениями в пространствах E^6 и E^7 , соответственно. Решение задачи приведено в п.1, 2 настоящей статьи.

1. Рассмотрим в пространстве E^6 полуправильный многогранник Госсета 2_{21} . Координаты его вершин зададим строками следующей матрицы [12]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_\nu = \cos \frac{2\pi\nu}{3}$, $s_\nu = \sin \frac{2\pi\nu}{3}$; $\lambda, \mu = 1, 2, 3$. Все 36 пятимерных плоскостей симметрии определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_5 = 0, \quad \sqrt{3}x_1 \pm x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_3 \pm x_4 = 0, \quad \sqrt{3}x_5 \pm x_6 = 0, \quad x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + 2x_5 = 0, \quad 2x_1 + 2x_3 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - 2x_5 = 0, \quad x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \quad x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через E_6 группу симметрий многогранника 2_{21} . Она порождена отражениями относительно плоскостей (1).

Алгебра инвариантов I^{E_6} группы E_6 порождена шестью алгебраически независимыми формами степеней $m_i = 2, 5, 6, 8, 9, 12$ [13], которые могут быть записаны в виде [14]:

$$Q_2 = \sum p_\lambda, \quad Q_5 = \sum q_\lambda(p_\mu - p_\nu), \quad Q_6 = \sum q_\lambda^2 - 10 \sum q_\lambda q_\mu + \sum p_\lambda^2 p_\mu - 3p_1 p_2 p_3,$$

$$Q_8 = 2 \sum q_\lambda^2 (p_\mu + p_\nu) - 6 \sum p_\lambda q_\lambda (q_\mu + q_\nu) + 8 \sum q_\lambda q_\mu p_\nu + \sum p_\lambda^2 p_\mu (p_\mu - p_\nu),$$

$$\begin{aligned} Q_9 = 5 \sum p_\lambda p_\mu^2 (q_\lambda + q_\nu) - 5 \sum p_\lambda^2 p_\mu (q_\mu + q_\nu) + \sum p_\lambda^2 q_\lambda (p_\mu - p_\nu) + \\ + \sum q_\lambda (p_\mu^3 - p_\nu^3) + 12 \sum q_\lambda (q_\mu^2 - q_\nu^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = 288 \sum_{\lambda < \mu} q_\lambda^2 q_\mu^2 - 72 \sum q_\lambda^3 q_\mu - 144 \sum q_\lambda^2 q_\mu q_\nu + 42 \sum p_\lambda^3 (q_\mu^2 + q_\nu^2) - 12 \sum p_\lambda^3 q_\lambda q_\mu + \\ + 48 \sum p_\lambda^3 q_\mu q_\nu - 70 \sum p_\lambda^2 q_\mu q_\nu (p_\mu + p_\nu) - 166 \sum p_\lambda^2 p_\mu q_\lambda q_\mu + \\ + 68 \sum p_\lambda p_\mu q_\nu (p_\lambda q_\lambda + p_\mu q_\mu) - 62 \sum p_\lambda p_\mu q_\nu^2 (p_\lambda + p_\mu) + 4 \sum q_\lambda^2 p_\lambda^2 p_\mu + 64 \sum q_\lambda^2 p_\lambda p_\mu^2 - \\ - 24 p_1 p_2 p_3 \sum q_\lambda^2 + 240 p_1 p_2 p_3 \sum q_\lambda q_\mu - 11 \sum p_\lambda^2 p_\mu p_\nu (p_\lambda^2 + p_\mu^2) + 2 \sum p_\lambda^4 p_\mu^2 - \\ - 2 \sum p_\lambda^4 p_\mu p_\nu + 10 \sum p_\lambda^3 p_\mu^3 + 30 p_1^2 p_2^2 p_3^2, \end{aligned}$$

здесь и далее переменные $p_\lambda = x_\alpha^2 + x_\beta^2$, $q_\lambda = \frac{1}{3}x_\alpha^3 - x_\alpha x_\beta^2$ ($(\alpha\beta) = (12), (34), (56)$), индексы λ, μ различны в каждом члене соответствующей суммы и индексы $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ (циклически).

При построении системы Флатто–Винер для группы E_6 будем считать, что $I_2 = Q_2$.

1. 1. Запишем инвариант Флатто–Винер пятой степени в виде $I_5 = aQ_5$. Подействуем на многочлен I_5 оператором $I_2(\partial)$, получим тождество. Следовательно, с точностью до постоянного множителя инвариант I_5 совпадает с Q_5 .

1. 2. Любой инвариант шестой степени группы E_6 представим в виде $a_1I_2^3 + a_2Q_6$, с неопределёнными коэффициентами a_1, a_2 . Для их нахождения запишем равенства $I_2(\partial)I_6(x) = 0, I_5(\partial)I_6(x) = 0$. Они приводят к уравнению $6a_1 + a_2 = 0$. Отсюда, $a_2 = -6a_1$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6 = \sum p_\lambda^3 - 3 \sum p_\lambda^2 p_\mu - 6 \sum q_\lambda^2 + 60 \sum q_\lambda q_\mu + 24 p_1 p_2 p_3.$$

1. 3. Инвариант восьмой степени представим в виде

$$I_8 = a_1 I_2^4 + a_2 Q_6 I_2 + a_3 Q_8.$$

Система уравнений $I_2(\partial)I_8(x) = 0, I_5(\partial)I_8(x) = 0, I_6(\partial)I_8(x) = 0$ приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений $48a_1 + 5a_2 = 0, 144a_1 + 33a_2 + 8a_3 = 0, 432a_1 + 9a_2 - 16a_3 = 0, 12a_1 - a_2 - a_3 = 0, 9a_2 + 4a_3 = 0, 432a_1 + 63a_2 + 8a_3 = 0$.

Её решение $a_2 = -\frac{48}{5}a_1, a_3 = \frac{108}{5}a_1$. Инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8 = 5 \sum p_\lambda^4 - 28 \sum p_\lambda^3 p_\mu + 42 \sum p_\lambda^2 p_\mu^2 - 48 \sum q_\lambda^2 p_\lambda + 168 \sum q_\lambda^2 p_\mu + \\ + 1344 \sum q_\lambda q_\mu p_\nu - 168 \sum q_\lambda q_\mu p_\mu.$$

1. 4. Запишем инвариант девятой степени в виде

$$I_9 = a_1 Q_5 I_2^2 + a_2 Q_9.$$

Система $I_2(\partial)I_9(x) = 0, I_5(\partial)I_9(x) = 0, I_6(\partial)I_9(x) = 0, I_8(\partial)I_9(x) = 0$ приводит к уравнению $3a_1 + 5a_2 = 0$. Следовательно, инвариант девятой степени имеет вид

$$I_9 = 36 \sum q_\lambda^2 (q_\mu - q_\nu) - 2 \sum p_\lambda^3 (q_\mu - q_\nu) + 2 \sum p_\lambda^2 q_\lambda (p_\mu - p_\nu) - \\ - 5 \sum p_\lambda q_\mu (p_\mu^2 - p_\nu^2) + 20 \sum p_\lambda^2 (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu).$$

1. 5. Инвариант двенадцатой степени можно записать в виде

$$I_{12} = a_1 I_2^6 + a_2 Q_6 I_2^3 + a_3 Q_6^2 + a_4 Q_8 I_2^2 + a_5 Q_5^2 I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial)I_{12}(x) = 0$, $I_5(\partial)I_{12}(x) = 0$, $I_6(\partial)I_{12}(x) = 0$, $I_8(\partial)I_{12}(x) = 0$, $I_9(\partial)I_{12}(x) = 0$, получим однородную систему из 31 линейного уравнения относительно шести коэффициентов a_i ($i = \overline{1,6}$). Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $96a_1 + 5a_2 = 0$, $864a_1 + 111a_2 + 14a_3 + 8a_4 + 16a_6 = 0$, $4320a_1 + 1149a_2 + 346a_3 + 376a_4 + 24a_5 + 2384a_6 = 0$, $4320a_1 + 951a_2 + 194a_3 + 184a_4 + 4a_5 + 736a_6 = 0$, $120a_1 - 2910a_2 - 635a_3 - 1260a_4 - 54a_5 - 5820a_6 = 0$.

Общее решение этой системы имеет вид: $a_2 = -\frac{96}{5}a_1$, $a_3 = \frac{10856}{155}a_1$, $a_4 = \frac{8978}{93}a_1$, $a_5 = \frac{114584}{93}a_1$, $a_6 = -\frac{14114}{465}a_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{12} = & 155 \sum p_\lambda^6 - 2046 \sum p_\lambda^5 p_\mu + 6831 \sum p_\lambda^4 p_\mu^2 - 10164 \sum_{\lambda < \mu} p_\lambda^3 p_\mu^3 + \\ & + 11880 \sum p_\lambda^4 p_\mu p_\nu - 9240 \sum p_\lambda^3 p_\mu p_\nu (p_\mu + p_\nu) - 9240 p_1^2 p_2^2 p_3^2 - 2976 \sum p_\lambda^3 q_\lambda^2 + \\ & + 20328 \sum p_\lambda^3 q_\mu^2 - 458304 \sum p_\lambda^3 q_\mu q_\nu - 37488 \sum p_\lambda^2 p_\mu q_\mu^2 - 3564 \sum p_\lambda^3 q_\lambda q_\mu + \\ & + 23892 \sum p_\lambda^2 q_\lambda^2 p_\mu + 203280 \sum p_\lambda q_\mu^2 p_\nu (p_\lambda + p_\nu) + 1848 \sum p_\lambda^2 p_\mu q_\lambda q_\mu - \\ & - 125664 \sum p_\lambda^2 q_\lambda (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + 351120 \sum p_\lambda^2 q_\mu q_\nu (p_\mu + p_\nu) - 3696 p_1 p_2 p_3 \sum q_\lambda q_\mu + \\ & + 10856 \sum q_\lambda^4 + 121616 \sum q_\lambda^3 q_\mu - 247632 \sum_{\lambda < \mu} q_\lambda^2 q_\mu^2 + 2631552 \sum q_\lambda^2 q_\mu q_\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, построены базисные инварианты Флатто–Винера I_{m_i} группы E_6 .

2. В вещественном евклидовом пространстве E^7 зададим прямоугольную систему координат Ox_i ($i = \overline{1,7}$). Вершины центрально симметричного многогранника \mathfrak{Z}_{21} в пространстве E^7 определим радиус-векторами $(\pm 1, 0, \pm 1, \pm 1, 0, 0, 0)$ и всеми получаемыми из них циклическими перестановками координат. Его 63 плоскости симметрии определяются уравнениями

$$x_i = 0, \quad (i = \overline{1,7}); \quad x_i \pm x_j \pm x_k \pm x_l = 0.$$

где индексы i, j, k, l принимают значения следующих четвёрок чисел: 1, 2, 3, 5; 1, 2, 4, 7; 1, 3, 6, 7; 1, 4, 5, 6; 2, 3, 4, 6; 2, 5, 6, 7; 3, 4, 5, 7 [15].

Группу симметрий многогранника \mathfrak{Z}_{21} обозначим E_7 . Образующие алгебры инвариантов этой группы имеют степени $m_i = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$ [12] и могут быть записаны в виде [15]:

$$Q_2 = \sum x_i^2, \quad Q_6 = \sum x_i^6 + 5 \sum x_i^4 x_j^2 + 30 \sum_{i < j < k} x_i^2 x_j^2 x_k^2,$$

$$Q_8 = 3 \sum x_i^8 + 28 \sum x_i^6 x_j^2 + 70 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 + 420 \sum_{j < k} x_i^4 x_j^2 x_k^2,$$

$$Q_{10} = \sum x_i^{10} + 15 \sum x_i^8 x_j^2 + 70 \sum x_i^6 x_j^4 + 420 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 + 1050 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 x_k^2,$$

$$Q_{12} = \sum x_i^{12} + 22 \sum x_i^{10} x_j^2 + 165 \sum x_i^8 x_j^4 + 308 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 990 \sum_{j < k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 + \\ + 4620 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 11550 \sum_{i < j < k} x_i^4 x_j^4 x_k^4,$$

$$Q_{14} = 3 \sum x_i^{14} + 91 \sum x_i^{12} x_j^2 + 1001 \sum x_i^{10} x_j^4 + 3003 \sum x_i^8 x_j^6 + 6006 \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 + \\ + 45045 \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + 84084 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + 210210 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4,$$

$$Q_{18} = \sum x_i^{18} + 51 \sum x_i^{16} x_j^2 + 1020 \sum x_i^{14} x_j^4 + 6188 \sum x_i^{12} x_j^6 + 14586 \sum x_i^{10} x_j^8 + \\ + 6120 \sum_{j < k} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 + 92820 \sum x_i^{12} x_j^4 x_k^2 + 1021020 \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^4 x_k^4 + 408408 \sum x_i^{10} x_j^6 x_k^2 + \\ + 656370 \sum_{i < j} x_i^8 x_j^8 x_k^2 + 3063060 \sum x_i^8 x_j^6 x_k^4 + 5717712 \sum_{i < j < k} x_i^6 x_j^6 x_k^6,$$

здесь и далее индексы $i, j, k, l, m, n, p = \overline{1, 7}$ различны в любом члене соответствующей суммы; i, j, k принимают значения следующих троек чисел: 1, 3, 4; 2, 4, 5; 3, 5, 6; 4, 6, 7; 5, 7, 1; 6, 1, 2; 7, 2, 3; а k, l, m - оставшиеся тройки.

2.1. Будем считать, что инвариант I_2 совпадает с Q_2 , а искомый базисный инвариант шестой степени находится среди форм

$$a_1 I_2^3 + a_2 Q_6.$$

Из уравнения $I_2(\partial) I_6(x) = 0$ находим $11a_1 + 15a_2 = 0$. Отсюда, $a_1 = -\frac{15}{11}a_2$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6 = 2 \sum x_i^6 - 5 \sum x_i^4 x_j^2 - 120 \sum_{i < j < k} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + 45 \sum_{k < l < m} x_k^2 x_l^2 x_m^2.$$

2. 2. Любой инвариант восьмой степени группы E_7 представим в виде

$$I_8 = a_1 I_2^4 + a_2 Q_6 I_2 + a_3 Q_8.$$

Поэтому рассмотрим систему уравнений $I_2(\partial) I_8(x) = 0$, $I_6(\partial) I_8(x) = 0$, которая приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений: $13a_1 + 16a_2 + 63a_3 = 0$, $78a_1 + 115a_2 + 630a_3 = 0$, $13a_1 + 35a_2 + 315a_3 = 0$, $52a_1 + 45a_2 = 0$, $171a_2 + 2268a_3 = 0$. Решение этой системы: $a_1 = \frac{2835}{247}a_3$, $a_2 = -\frac{252}{19}a_3$. Таким образом, инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8 = 15 \sum x_i^8 - 70 \sum x_i^6 x_j^2 + 77 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 + 336 \sum_{j < k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 63 \sum_{l < m} x_k^4 x_l^2 x_m^2 + \\ + 3402 \sum_{i < j < k < l} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 1512 \sum_{k < l < m < n} x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2.$$

2. 3. Инварианты десятой степени группы E_7 могут быть представлены в виде

$$I_{10} = a_1 I_2^5 + a_2 Q_6 I_2^2 + a_3 Q_8 I_2 + a_4 Q_{10}.$$

Система $I_2(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{10}(x) = 0$ приводит к уравнениям: $25a_1 + 29a_2 + 107a_3 + 45a_4 = 0$, $45a_1 + 69a_2 + 413a_3 + 315a_4 = 0$, $15a_1 + 16a_2 + 42a_3 = 0$, $15a_1 + 37a_2 + 329a_3 + 315a_4 = 0$, $10a_1 + 13a_2 + 42a_3 = 0$, $75a_1 + 108a_2 + 539a_3 + 315a_4 = 0$, $5a_1 + 3a_2 = 0$, $133a_2 + 1764a_3 + 1890a_4 = 0$, $25a_1 + 29a_2 + 176a_3 + 180a_4 = 0$. Её решение: $a_1 = -\frac{162}{23}a_4$, $a_2 = \frac{270}{23}a_4$, $a_3 = -\frac{45}{23}a_4$. Следовательно, инвариант I_{10} имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{10} = & 2 \sum x_i^{10} - 15 \sum x_i^8 x_j^2 + 50 \sum x_i^6 x_j^4 + 480 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 - 90 \sum_{l < m} x_k^6 x_l^2 x_m^2 - \\ & - 1320 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 - 45 \sum_{k < l} x_k^4 x_l^4 x_m^2 + 810 \sum_{j < k < l} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 3240 \sum_{i < j < k} x_m^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 + \\ & + 2160 \sum_{l < m < n} x_k^4 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - 6480 \sum_{i < j < k < l < m} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2. \end{aligned}$$

Отметим, что в [16] при решении системы была допущена ошибка. Здесь приведено верное решение.

2. 4. Запишем инвариант группы E_7 двенадцатой степени

$$I_{12} = a_1 I_2^6 + a_2 Q_6 I_2^3 + a_3 Q_6^2 + a_4 Q_8 I_2^2 + a_5 Q_5^2 I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_{10}(\partial) I_{12}(x) = 0$ получим однородную систему 16 линейного уравнения относительно коэффициентов a_i ($i = \overline{1, 6}$). Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $17a_1 + 19a_2 + 21a_3 + 67a_4 + 27a_5 + 33a_6 = 0$, $255a_1 + 354a_2 + 485a_3 + 1657a_4 + 900a_5 + 1485a_6 = 0$, $1020a_1 + 1209a_2 + 1390a_3 + 4172a_4 + 1260a_5 = 0$, $153a_1 + 378a_2 + 875a_3 + 3409a_4 + 3465a_5 + 10395a_6 = 0$, $8a_1 - 249a_2 - 458a_3 - 3332a_4 - 3402a_5 - 8316a_6 = 0$.

Общее решение этой системы: $a_1 = \frac{280}{761}a_4$, $a_2 = -\frac{1288}{761}a_4$, $a_3 = -\frac{490}{761}a_4$,
 $a_5 = -\frac{970}{761}a_4$, $a_6 = \frac{1735}{8371}a_4$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
I_{12} = & 30 \sum x_i^{12} - 330 \sum x_i^{10} x_j^2 + 913 \sum x_i^8 x_j^4 - 924 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 1584 \sum_{j < k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 + \\
& + 1947 \sum_{l < m} x_k^8 x_l^2 x_m^2 - 1232 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 - 2618 \sum x_k^6 x_l^4 x_m^2 - 7392 \sum_{i < j < k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + \\
& + 4851 \sum_{k < l < m} x_k^4 x_l^4 x_m^4 - 41580 \sum_{j < k < l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 33264 \sum_{i < j < k} x_m^6 x_i^2 x_j^2 x_k^2 - \\
& - 7392 \sum_{l < m < n} x_k^6 x_l^2 x_m^2 x_n^2 + 51282 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2 + 20328 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_m^2 - \\
& - 11088 \sum_{i < m} x_i^4 x_m^4 x_j^2 x_k^2 + 133056 \sum_{i < j < k < l} x_m^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - \\
& - 99792 \sum_{j < k < l < m} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 + 798336 \sum_{i < j < k < l < m < n} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2.
\end{aligned}$$

2. 5. Инварианты четырнадцатой степени можно записать в виде

$$I_{14} = a_1 I_2^7 + a_2 Q_6 I_2^4 + a_3 Q_6^2 I_2 + a_4 Q_8 I_2^3 + a_5 Q_8 Q_6 + a_6 Q_{10} I_2^2 + a_7 Q_{12} I_2 + a_8 Q_{14}.$$

Из уравнений $I_2(\partial) I_{14}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{14}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{14}(x) = 0$,
 $I_{10}(\partial) I_{14}(x) = 0$, $I_{12}(\partial) I_{14}(x) = 0$, получаем совместную систему 32 линейных
однородных уравнений, равносильную следующей системе 7 уравнений: $133a_1 +$
 $+ 145a_2 + 157a_3 + 495a_4 + 531a_5 + 193a_6 + 229a_7 + 819a_8 = 0$, $399a_1 + 535a_2 + 703a_3 +$
 $+ 2385a_4 + 3049a_5 + 1229a_6 + 1925a_7 + 9009a_8 = 0$, $399a_1 + 595a_2 + 883a_3 + 3249a_4 +$
 $+ 4765a_5 + 2147a_6 + 4389a_7 + 27027a_8 = 0$, $665a_1 + 1025a_2 + 1583a_3 + 5985a_4 + 9289a_5 +$
 $+ 4235a_6 + 9317a_7 + 63063a_8 = 0$, $133a_1 + 165a_2 + 209a_3 + 621a_4 + 821a_5 + 235a_6 + 198a_7 =$
 $= 0$, $399a_1 + 925a_2 + 1981a_3 + 8001a_4 + 16219a_5 + 7805a_6 + 22407a_7 + 189189a_8 = 0$,
 $56a_1 - 385a_2 - 770a_3 - 5460a_4 - 6235a_5 - 5474a_6 - 13068a_7 - 81081a_8 = 0$. Её
решение: $a_1 = \frac{24270246}{322121}a_8$, $a_2 = -\frac{234215982}{1610605}a_8$, $a_3 = \frac{26486460}{322121}a_8$, $a_4 = -\frac{1621620}{322121}a_8$,
 $a_5 = -\frac{81081}{10391}a_8$, $a_6 = \frac{13648635}{322121}a_8$, $a_7 = -\frac{190827}{10391}a_8$.

Поэтому инвариант четырнадцатой степени имеет вид:

$$\begin{aligned}
I_{14} = & 3252 \sum x_i^{14} - 49322 \sum x_i^{12} x_j^2 + 224042 \sum x_i^{10} x_j^4 - 297570 \sum x_i^8 x_j^6 + \\
& + 777504 \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 + 283374 \sum_{l < m} x_k^{10} x_l^2 x_m^2 - 2837016 \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 - \\
& - 695331 \sum x_k^8 x_l^4 x_m^2 + 4464096 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + 3049956 \sum_{k < l} x_k^6 x_l^6 x_m^2 + \\
& + 2812992 \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4 - 2098278 \sum_{l < m} x_k^6 x_l^4 x_m^4 - 1636362 \sum_{j < k < l} x_i^8 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - \\
& - 2299752 \sum_{i < j < k} x_m^8 x_i^2 x_j^2 x_k^2 - 235872 \sum_{l < m < n} x_k^8 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - 7636356 \sum_{k < l} x_i^6 x_j^4 x_k^2 x_l^2 - \\
& - 6604416 \sum_{j < k} x_m^6 x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 1651104 \sum_{j < k} x_i^6 x_m^4 x_j^2 x_k^2 - 1100736 \sum_{k < m} x_i^6 x_j^4 x_k^2 x_m^2 + \\
& + 38697750 \sum_{i < j < k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_l^2 - 31646160 \sum_{i < j < k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_m^2 + 18574920 \sum_{k < l < m} x_k^4 x_l^4 x_m^4 x_n^2 - \\
& + 66044160 \sum_{n < i} x_n^4 x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 20638800 \sum_{i < j} x_m^4 x_n^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 - \\
& - 107321760 \sum_{m < n} x_m^i x_j^4 x_k^2 x_l^2 x_m^2 + 49533120 \sum_{j < k < l < m < n} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - \\
& - 1783192320 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2 x_7^2.
\end{aligned}$$

2. 6. Инвариант восемнадцатой степени представим в виде

$$\begin{aligned}
I_{18} = & a_1 I_2^9 + a_2 Q_6 I_2^6 + a_3 Q_6^2 I_2^3 + a_4 Q_6^3 + a_5 Q_8 I_2^5 + a_6 Q_8 Q_6 I_2^2 + a_7 Q_8^2 I_2 + \\
& + a_8 Q_{10} I_2^4 + a_9 Q_{10} Q_6 I_2 + a_{10} Q_{10} Q_8 + a_{11} Q_{12} I_2^3 + a_{12} Q_{12} Q_6 + a_{13} Q_{14} I_2^2 + a_{14} Q_{18}.
\end{aligned}$$

Из уравнений $I_2(\partial) I_{18}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{18}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{18}(x) = 0$, $I_{10}(\partial) I_{18}(x) = 0$, $I_{12}(\partial) I_{18}(x) = 0$, $I_{14}(\partial) I_{18}(x) = 0$ получаем совместную систему 88 линейных однородных уравнений. Решение этой системы:

$$\begin{aligned}
a_1 = & -\frac{224760471962377}{1177434995692} a_{14}, & a_2 = & \frac{125992387715922}{294358748923} a_{14}, & a_3 = & -\frac{412851377575364}{1471793744615} a_{14}, \\
a_4 = & \frac{76869873080}{10150301687} a_{14}, & a_5 = & \frac{11936255768879}{588717497846} a_{14}, & a_6 = & \frac{41333454425666}{1471793744615} a_{14}, \\
a_7 = & \frac{352924349739}{203006033740} a_{14}, & a_8 = & -\frac{67283347778218}{294358748923} a_{14}, & a_9 = & \frac{99914730292}{10150301687} a_{14}, \\
a_{10} = & -\frac{22509873672}{10150301687} a_{14}, & a_{11} = & \frac{446774326842480}{3237946238153} a_{14}, & a_{12} = & -\frac{60195292248}{10150301687} a_{14}, \\
a_{13} = & -\frac{35198762013180}{3237946238153} a_{14}.
\end{aligned}$$

Следовательно, базисный инвариант Флатто – Винер 18-ой степени имеет вид:

$$\begin{aligned}
I_{18} = & 111658 \sum x_i^{18} - 2847279 \sum x_i^{16} x_j^2 + 22137060 \sum x_i^{14} x_j^4 - 70202860 \sum x_i^{12} x_j^6 + \\
& + 64163814 \sum x_i^{10} x_j^8 + 56793600 \sum_{j < k} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 + 38014380 \sum_{m < n} x_l^{14} x_m^2 x_n^2 - \\
& - 287890512 \sum x_i^{12} x_j^4 x_k^2 - 168384762 \sum x_l^{12} x_m^4 x_n^2 + 702461760 \sum x_i^{10} x_j^6 x_k^2 + \\
& + 533585052 \sum x_l^{10} x_m^6 x_n^2 + 692659968 \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^4 x_k^4 + 169387218 \sum_{m < n} x_l^{10} x_m^4 x_n^4 - \\
& - 933095592 \sum_{i < j} x_i^8 x_j^8 x_k^2 - 1210411917 \sum_{l < m} x_l^8 x_m^8 x_n^2 - 494990496 \sum x_i^8 x_j^6 x_k^4 + \\
& + 875728854 \sum x_l^8 x_m^6 x_n^4 + 228708480 \sum_{i < j < k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 - 5480426952 \sum_{l < m < n} x_l^6 x_m^6 x_n^6 - \\
& - 1660568364 \sum_{j < k < l} x_i^{12} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 1078642656 \sum_{i < j < k} x_m^{12} x_i^2 x_j^2 x_k^2 - \\
& - 428382864 \sum_{m < n < p} x_l^{12} x_m^2 x_n^2 x_p^2 + 4890481596 \sum_{k < l} x_i^{10} x_j^4 x_k^2 x_l^2 - \\
& - 5153292144 \sum_{j < k} x_m^{10} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 1279133856 \sum_{j < k} x_i^{10} x_m^4 x_j^2 x_k^2 + \\
& + 1076971896 \sum_{k < m} x_i^{10} x_j^4 x_k^2 x_m^2 - 766377612 \sum_{k < l} x_i^8 x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\
& + 17510901408 \sum_{j < k} x_m^8 x_i^6 x_j^2 x_k^2 - 11490150672 \sum_{j < k} x_i^8 x_m^6 x_j^2 x_k^2 - \\
& - 628539912 \sum_{k < m} x_i^8 x_j^6 x_k^2 x_m^2 - 20055385350 \sum_{k < l} x_i^8 x_j^2 x_k^4 x_l^4 - \\
& - 11412961560 \sum_{j < k} x_m^8 x_i^2 x_j^4 x_k^4 - 4079995920 \sum_{j < k} x_i^8 x_m^2 x_j^4 x_k^4 - \\
& - 1212971760 \sum_{k < m} x_i^8 x_j^2 x_k^4 x_m^4 + 14434363944 \sum_{k < l} x_i^4 x_j^2 x_k^6 x_l^6 - \\
& - 102918816 \sum_{j < k} x_m^4 x_i^2 x_j^6 x_k^6 + 6072210144 \sum_{j < k} x_i^4 x_m^2 x_j^6 x_k^6 + \\
& + 9417071664 \sum_{k < m} x_i^4 x_j^2 x_k^6 x_m^6 + 14472958500 \sum_{j < k < l} x_i^6 x_j^4 x_k^4 x_l^4 - \\
& - 6175128960 \sum_{i < j < k} x_m^6 x_i^4 x_j^4 x_k^4 - 5660534880 \sum_{m < n < p} x_l^6 x_m^4 x_n^4 x_p^4 - \\
& - 6704425728 \sum_{i < j < k < l} x_m^{10} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 7189614432 \sum_{m < n < p < q} x_l^{10} x_m^2 x_n^2 x_p^2 x_q^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +45817251480 \sum_{k<l<m} x_i^8 x_j^4 x_k^2 x_l^2 x_m^2 + 14555661120 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_m^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + \\
& +37712394720 \sum_{j<k<l} x_m^8 x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 59545886400 \sum_{i<j<k} x_m^8 x_n^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 - \\
& -50636057472 \sum_{\substack{m<i \\ j<k<l}} x_m^6 x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 100654602048 \sum_{\substack{m<n \\ i<j<k}} x_m^6 x_n^6 x_i^2 x_j^2 x_k^2 - \\
& -115474911552 \sum_{\substack{i<j \\ k<l<m}} x_i^6 x_j^6 x_k^2 x_l^2 x_m^2 - 83364240960 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_m^6 x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2 + \\
& +13894040160 \sum_{\substack{j<m \\ k<l}} x_i^6 x_j^4 x_m^4 x_k^2 x_l^2 + 46313467200 \sum_{\substack{m<n \\ j<k}} x_i^6 x_m^4 x_n^4 x_j^2 x_k^2 - \\
& -40138338240 \sum_{\substack{j<k \\ m<n}} x_i^6 x_j^4 x_k^4 x_m^2 x_n^2 - 289459170000 \sum_{i<j<k<l} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_l^4 x_m^2 + \\
& +115783668000 \sum_{i<j<k<m} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_m^4 x_n^2 - 301699157760 \sum_{j<k<l<m<n} x_i^8 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - \\
& -111152321280 \sum_{i<j<k<l} x_m^6 x_n^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 213041949120 \sum_{n<p<q<r} x_l^6 x_m^4 x_n^2 x_p^2 x_q^2 x_r^2 - \\
& -439977938400 \sum_{\substack{i<j<k \\ m<n<p}} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_m^2 x_n^2 x_p^2 - 764172208800 \sum_{\substack{m<n<p \\ i<j<k}} x_m^4 x_n^4 x_p^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 + \\
& +208410602400 \sum_{\substack{l<m<n \\ p<q<r}} x_l^4 x_m^4 x_n^4 x_p^2 x_q^2 x_r^2 + \\
& +4001483566080 \sum_{j<k<l<m<n<p} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2 x_p^2 - \\
& -1667284819200 \sum_{\substack{i<j \\ k<l<m<n<p}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2 x_m^2 x_n^2 x_p^2
\end{aligned}$$

Таким образом, построена система базисных инвариантов Флатто–Винер группы E_7 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в явном виде построена система базисных инвариантов Флатто–Винер групп E_6 и E_7 .

В дальнейшем предполагается построение систем базисных инвариантов Флатто–Винер групп H_3 и H_4 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shephard G.C., Todd J.A. Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. – 1954. – 6, N2. – P. 274 - 304.

2. Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections // Amer. j. Math. – 1955. – V.77 – P. 778 - 782.
3. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947, – 418 с.
4. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1980. – Т.11. – с. 203 – 240.
5. Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1989. – Т.21. – с. 155 – 208.
6. Винберг Э. Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Соврм. пробл. математики. 1989. – Т.55. – с. 137 - 309.
7. Shepler A.V. Semiinvariants of finite reflection groups // Department of Mathematics, University of California at San Diego, La Jolla, California, 92093 - 0112, *E - mail address*: ashepler@euclid.ucsd.edu
8. Flatto L. Invariants of finite reflection groups // Enseign. Math. 1978. – V.24. – № 3 – 4. – P. 237 - 292.
9. Кобец А. А., Романенко И.А. Особые многообразия для групп J_2^2 , A_3 и A_4 // Труды математического факультета. – Симферополь, 1997 – С.72 - 78.
10. Кобец А. А. Об одном классе алгебраических поверхностей с группой симметрий правильного 24-гранника // Таврич. нац. ун-т. – Симферополь, 1993. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №1861 УК-93.
11. Кобец А. А. Об одной системе базисных инвариантов группы E_8 // Тезисы докл. Пятая международная конференция им. акад. М. Кравчука. – Киев, 1996. – С. 72 -73.
12. Coxeter H. S. M. The polytope 2_{21} , whose tweety seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface// Amer. J. Math. 1940. – v.76, № 3. – p. 457 - 486.
13. Coxeter H. S. M. The product of the generators of a finite group generated by reflections// Duke Math. j. 1951. – v.18, – p. 765 - 782.
14. Frame J. S. The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents // Annali di Matematika. 1951 – v. 32, – p. 83 - 119.
15. Игнатенко В.Ф. Об инвариантах конечных групп, порождённых отражениями // Мат. сб. – Москва, 1983. – 120(162) – №4 – с. 556 - 568.
16. Кобец А.А., Об одной системе базисных инвариантов группы E_7 // Таврич. нац. ун-т. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №2213 УК - 95

Нехай G скінчена група симетрій, що породжена віддзеркаленнями відносно гіперплощин в дійсному просторі E^n . Знайдені алгебри інваріантів Флатто-Вінер груп E_6 та E_7 .

Let G be a finite group of symmetries with respect to hyperplanes in real space E^n . Algebras of Flatto-Weiner invariants of groups E_6 and E_7 are found.