Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 32–38.

УДК 517. 432

Ю. Л. Кудряшов

ИЗОМОРФИЗМ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

В работе рассматривается спектральное представление самосопряженной дилатации диссипативного оператора и представление только для ограниченного диссипативного оператора. В случае ограниченного оператора непосредственно построен изоморфизм указанных представлений дилатации.

Введение

В [1] было построено спектральное представление самосопряженной дилатации произвольного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек, а в [2] получена самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера. Последнее представление дилатации можно обобщить [3] только на случай произвольного ограниченного оператора, т. к. при построении дилатации используется дефектный оператор $\dfrac{A-A^*}{2i}$, который в случае неограниченных операторов применять, вообще говоря, нельзя в связи с тем, что области определений операторов A и A^* могут не совпадать.

Пусть оператор A действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$.

Определение 1. Дилатации S_1 и S_2 оператора A, действующие соответственно в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что

1) $Uh = h \quad (\forall\, h \in \mathcal{G})$;
2) $S_2 = US_1U^{-1}$.

1. Предварительные сведения

Пусть A, вообще говоря, неограниченный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, плотно заданный и $-i \in \rho(A)$.

Будем использовать дефектные операторы

$$B = i\,R_{-i} + i\,R_{-i}^{*} - 2\,R_{-i}^{*}R_{-i},$$

$$\widetilde{B} = i\,R_{-i} + i\,R_{-i}^{*} - 2\,R_{-i}R_{-i}^{*},\ \text{где}\ R_{-i} = (A + i\,I)^{-1}.$$

Так как $B \geq 0$ и $\widetilde{B} \geq 0$ [1], то существуют операторы $Q = \sqrt{B}$, $\widetilde{Q} = \sqrt{\widetilde{B}}$.

Рассмотрим пространства вектор — функций $H_{+} = L_2\,(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$ и $H_{-} = L_2\,(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_2)$, где $\mathcal{G}_1 = \overline{Q\,\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}_2 = \overline{\widetilde{Q}\,\mathcal{G}}$.

Образуем гильбертово пространство $H = H_{-} \oplus \mathcal{G} \oplus H_{+}$ и построим в нем оператор S следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_{-} \\ h_0 \\ h_{+} \end{pmatrix}$, где $h_{\pm} \in H_{\pm}$, $h_0 \in \mathcal{G}$ принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_{-},\ \dfrac{dh_{-}}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_1)$, $\left\{h_{+},\ \dfrac{dh_{+}}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_2)$;

2) $\varphi = h_0 + \widetilde{Q}\,h_{-}(0) \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $h_{+}(0) = T^{*}h_{-}(0) + i\,\mathcal{D}\,\varphi$, где $T^{*} = I + 2\,i\,R_{-i}^{*}$, $\mathcal{D} = Q\,(A + i\,I)$.

Если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_{-} \\ h_0 \\ h_{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{-}\,h_{-} \\ -i\,h_0 + (A + i\,I)\,\varphi \\ \mathcal{P}_{+}\,h_{+} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_{+}\,h_{+} = i\,\dfrac{dh_{+}}{dt}$, $\mathcal{P}_{-}\,h_{-} = i\,\dfrac{dh_{-}}{dt}$.

Оператор S является спектральным представлением самосопряженной дилатации оператора A [1].

Теперь пусть A — ограниченный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$.

Рассмотрим дефектный оператор $V = \dfrac{A - A^{*}}{2i} \geq 0$.

Образуем гильбертово пространство $\widetilde{H} = H_{+}^{'} \oplus \mathcal{G} \oplus H_{-}^{'}$, где $H_{-}^{'} = L_2(-\infty,\ 0;\ E)$, $H_{+}^{'} = L_2(0,\ \infty;\ E)$, $E = \overline{\sqrt{V}\,E}$.

Построим в $\widetilde{H}$ оператор S_V следующим образом: вектор $\widetilde{V} = \begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S_V)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{V_+,\ \dfrac{dV_+}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)$, $\left\{V_-,\ \dfrac{dV_-}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ E)$;

2) $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $V_+(0) = i\sqrt{2\,V}\,h_0 + V_-(0)$.

Если $\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S_V)$, то

$$S_V\widetilde{V} = S_V \begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\, V_- \\ A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) \\ \mathcal{P}_+\, V_+ \end{pmatrix}$$

Оператор S_V является самосопряженной дилатацией оператора A [3].

2. Основной результат

Теорема 1. *Самосопряженные дилатации S и S_V диссипативного ограниченного оператора A, $-i \in \rho(A)$ изоморфны.*

Доказательство. Учитывая, что $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$, дилатацию S можно преобразовать к виду

$$Sh = S \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\, h_- \\ A\,h_0 + (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) \\ \mathcal{P}_+\, h_+ \end{pmatrix},$$

где $h \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_-,\ \dfrac{dh_-}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_2)$, $\left\{h_+,\ \dfrac{dh_+}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$;

2) $h_0 \in \mathcal{G}$;

3) $h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \left(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\right)\,h_-(0)$.

Построим унитарное отображение пространства $H_+^{'} = L_2(0,\ \infty;\ E)$ на $H_+ = L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$. Для этого достаточно построить унитарное отображение пространства E на пространство $\mathcal{G}_1$.

Будем использовать легко проверяемое равенство

$$2\,V\,h_0 = (A^* - i\,I)\,B\,(A + i\,I)\,h_0 \quad (\forall\, h_0 \in \mathcal{G}),$$

из которого следует равенство:

$$\left\|\sqrt{2\,V}\,h_0\right\| = \|Q\,(A+i\,I)\,h_0\| \tag{1}$$

Тогда отображение U_1, определяемое равенством

$$U_1(\sqrt{2\,V}\,h_0) = Q\,(A+i\,I)\,h_0,$$

определено на плотном в E множестве и сохраняет норму ввиду (1). Расширяя U_1 по непрерывности на все пространство E, получим унитарное отображение U_1 пространства E на $\mathcal{G}_1$.

Теперь построим унитарное отображение U_2 пространства $H_+^{'}$ на пространство H_+ по правилу:

$$U_2\,h_+^{'} = U_1\,h_+^{'}(t) = h_+$$

(оператор U_1 действует на векторы $h_+^{'}(t)$ при каждом фиксированном t).

Аналогично, используя равенство

$$2\,V\,h_0 = (A+i\,I)\,\widetilde{B}\,(A^*-i\,I)\,h_0,$$

из которого следует, что $\left\|\sqrt{2\,V}\,h_0\right\| = \left\|\widetilde{Q}\,(A^*-i\,I)\,h_0\right\|$, построим унитарное отображение $U_2^{'}$ пространства $H_-^{'}$ на H_-.

И, наконец, построим унитарный оператор U, отображающий пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ на H по формуле:

$$U\begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{'}\,V_- \\ h_0 \\ U_2\,V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $S_V = U^{-1}S\,U$. Для этого достаточно показать:
а) если $\widetilde{V}\in\mathfrak{D}(S_V)$, то $U\,\widetilde{V}\in\mathfrak{D}(S)$ и, что

$$U\,S_V\,\widetilde{V} = S\,U\,\widetilde{V};$$

б) если $h\in\mathfrak{D}(S)$, то $U^{-1}\,h\in\mathfrak{D}(S_V)$ и, что

$$S_V\,U^{-1}\,h = U^{-1}S\,h.$$

В силу унитарной эквивалентности пространств $H_+^{'}$, $H_-^{'}$ и H_+, H_- соответственно, оператору дифференцирования при отображении U будет соответствовать этот же оператор.
а) Пусть $\widetilde{V}\in\mathfrak{D}(S_V)$, докажем, что $U\,\widetilde{V}\in\mathfrak{D}(S)$. Для этого достаточно проверить только выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(S)$.

Так как $V_+(0) = U_1^{-1}\,h_+(0)$, $V_-(0) = U_1^{'^{-1}}\,h_-(0)$ и $V_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\,h_0 + V_-(0)$, то

$$U_1^{-1}\,h_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\,h_0 + U_1^{'^{-1}}\,h_-(0)$$

или

$$h_+(0) = i\,Q\,(A+i\,I)\,h_0 + U_1\,U_1^{'^{-1}}\,h_-(0).$$

Так как $h_-(0) \in \overline{\widetilde{Q}\,\mathcal{G}}$ и $\mathcal{G} = (A^* - i\,I)\,\mathcal{G}$, то преобразуем вектор $U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0)$, когда $h_-(0) = \widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}$

$$U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0) = U_1\,U_1^{'-1}\,\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'} =$$

$$= Q\,(A + i\,I)\,h_0^{'} = Q\,(A + i\,I)\,R_{-i}^*\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}.$$

Ввиду равенства $(A + i\,I)\,R_{-i}^* = i\,(A + i\,I)\,\widetilde{B} + T^*$, имеем:

$$U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0) = Q\,\Big(i\,(A + i\,I)\,\widetilde{B} + T^*\Big)\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'} =$$

$$= i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,\Big[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\Big] + T^*\,\Big[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\Big] =$$

$$= i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) + T^*\,h_-(0).$$

Мы использовали равенство $Q\,T^* = T^*\,\widetilde{Q}$ [1].

Таким образом,

$$h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \Big(T^* + i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\Big)\,h_-(0).$$

Это равенство выполняется для любого вектора $h_-(0)$, т. к. операторы $U_1\,U_1^{'-1}$, T^* и $Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}$ — ограниченные.

Условие 3) на $\mathfrak{D}(S)$ доказано.

Теперь проверим равенство $U\,S_V\,\widetilde{V} = S\,U\,\widetilde{V}$. Так как

$$A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) = A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,U_1^{'-1}\,h_-(0),$$

то полагая, как и выше, $h_-(0) = \widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}$, где $h_0^{'} \in \mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$, получаем

$$A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) =$$

$$= A\,h_0 + 2\,V\,h_0^{'} = A\,h_0 + (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,\Big[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\Big] = (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0).$$

А так как $2\,V = (A + i\,I)\,\widetilde{B}\,(A^* - i\,I)$, то первая часть утверждения доказана.

б) Пусть теперь $h \in \mathfrak{D}(S)$, и докажем, что $U^{-1}\,h \in \mathfrak{D}(S_V)$. Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(S_V)$.

Так как $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \Big(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\Big)\,h_-(0),$$

$$h_+(0) = U_1\,V_+(0), \quad h_-(0) = U_1^{'}\,V_-(0).$$

Из этих равенств получаем:

$$U_1\,V_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \Big(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\Big)\,U_1^{'}\,V_-(0),$$

$$V_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\,h_0 + U_1^{-1}\,\Big(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\Big)\,U_1^{'}\,V_-(0).$$

Преобразуем вектор $\Psi = U_1^{-1}\left(i\,Q\,(A+i\,I)\,\widetilde{Q}+T^*\right)U_1'\,V_-(0)$, считая, что $V_-(0) = \sqrt{2\,V}\,h$, где $h \in \mathcal{G}$

$$\Psi = U_1^{-1}\left(i\,Q\,(A+i\,I)\,\widetilde{Q}+T^*\right)U_1'\,V_-(0) =$$

$$= i\sqrt{2\,V}\,\widetilde{Q}\,U_1'\,V_-(0) + U_1^{-1}\,T^*\,U_1'\,V_-(0) =$$

$$= i\sqrt{2\,V}\,\widetilde{Q}\,\widetilde{Q}\,(A^*-i\,I)\,h + U_1^{-1}\,T^*\,\widetilde{Q}\,(A^*-i\,I)\,h.$$

Так как $\widetilde{B}\,(A^*-i\,I)\,h = i\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - i\,h - 2\,R_{-i}\,h$, то

$$\Psi = i\sqrt{2\,V}\,\left(i\,R_{-i}\,(A^*-i\,I) - i\,I - 2\,R_{-i}\right)\,h + U_1^{-1}\,Q\,(I+2\,i\,R_{-i})\,(A^*-i\,I)\,h =$$

$$= \sqrt{2\,V}\,h - \sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h + U_1^{-1}\,\left[Q\,(A+i\,I)\right]\,R_{-i}\,((A^*-i\,I)+2\,i\,I)\,h =$$

$$= V_-(0) - i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h + \sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h + 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h = V_-(0).$$

Таким образом, $V_+(0) = i\sqrt{2\,V}\,h_0 + V_-(0)$ и условие 3) на $\mathfrak{D}(S_V)$ выполнено.

Теперь преобразуем выражение

$$A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) = A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,U_1'\,V_-(0) =$$

$$= A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,U_1'\sqrt{2\,V}\,h = A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{B}\,(A^*-i\,I)\,h =$$

$$= A\,h_0 + 2\,V\,h_0 = A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0).$$

Таким образом, S_V — дилатация оператора A, изоморфная дилатации S. □

Выводы

В случае ограниченности диссипативного оператора A для построения его самосопряженной дилатации можно использовать методы работ [1] или [3], что приводит к одинаковым результатам. В частности, при построении функциональной модели оператора A.

Список литературы

[1] Кудряшов Ю.Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов.* - Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982, вып. 37, с. 51–54.

[2] Павлов Б.С. *Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям.* – Мат. сб., 1977, 102(144) №4, с. 511–536.

[3] Золотарев В.А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* – Харьков: ХНУ, 2003. – 342 с.

Ізоморфізм двох представлень самосопряженної дилатації дисипативного оператора

У роботі розглядається спектральне представлення самоспряжної дилатації дисипативного оператора і представлення лише для обмеженого дисипативного оператора. В разі обмеженого оператора безпосередньо побудован ізоморфізм вказаних представлень дилатації.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

Isomorphism of two presentations of self-conjugate dilatation of dissipative operator

Spectral presentation of self-conjugate dilatation of dissipative operator and presentation is in-process examined only for the limited dissipative operator. In the case of the limited operator the isomorphism of the indicated presentations of dilatation is directly built.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.