

УДК 535.2:548.1.022/.024

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С УЧЕТОМ МЕХАНИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

*Фридман Ю.А., Гореликов Г.А.*

*Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Украина  
E-mail: [ansergar@mail.ru](mailto:ansergar@mail.ru)*

Исследованы спектры связанных магнитоупругих волн в полубесконечном сильно анизотропном легкоплоскостном ферромагнетике с жестко закрепленной гранью. Получена фазовая диаграмма исследуемой системы. Показано, что на линиях фазовых переходов ФМ – КФМ-фаза и КУ-КФМ-фаза квазифоннная мода становится мягкой. Учет вращательной инвариантности приводит к эффекту невзаимности для скоростей звука в кристалле. Обнаружено, что в образце с закрепленной гранью скорость звука возрастает по сравнению со скоростью звука в свободном (либо жестко закрепленным со всех сторон) образце, а область существования КФМ-фазы становится шире.

**Ключевые слова:** магнитоупругое взаимодействие, вращательная инвариантность, эффект невзаимности, фазовые переходы.

### ВВЕДЕНИЕ

Динамические проявления магнитоупругой (МУ) связи имеют принципиальное значение в теории магнетизма. Спин-решеточное взаимодействие определяет связь механических (упругих, акустических, стрикционных) и магнитных характеристик системы [1], а также значительно влияет на критическое поведение при магнитных фазовых переходах [2, 3]. В частности, магнитоупругая связь способна полностью подавить аномальные критические флуктуации в точке фазового перехода второго рода и заблокировать появление доменной структуры в дисимметричной фазе. Более подробно различные качественные аспекты влияния спин-решеточной связи на характер критического поведения системы, а также на другие физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов описаны в [4].

При этом важно учитывать механические граничные условия, накладываемые на систему. Во-первых, экспериментальные исследования магнитоупругих свойств связаны с некоторыми способами крепления образца в установке. Накладываемые механические условия определяют структуру спонтанных деформаций магнитоупорядоченного кристалла. Величина и структура спонтанных деформаций, в свою очередь, влияет как на термодинамические, так и на кинетические характеристики системы, а следовательно, и на результаты эксперимента.

Во-вторых, при создании магнитных пленок необходимо учитывать влияние подложки на образец. На важность проблемы учета механических граничных условий обращали внимание ряд авторов [5, 6, 7], однако к настоящему времени этот вопрос изучен явно недостаточно.

Теоретические исследования динамических проявлений магнитоупругой связи велись до сих пор в рамках двух взаимно дополняющих друг друга подходов. Первый подход основан на общей гидродинамической теории, игнорирующей динамическую природу внутренних степеней свободы кристалла, при этом эффекты временной и пространственной дисперсии акустических свойств либо вовсе остаются за рамками рассмотрения, либо учитываются лишь на симметричном, гидродинамическом уровне. Такой подход является строгим (точнее, безмодельным), однако область его применимости ограничена низкими частотами и большими длинами волн. Кроме того, чисто гидродинамический подход позволяет в общем случае исследовать лишь акустические свойства, но не спиновую динамику.

Второй подход также принято называть феноменологическим, однако он уже существенно использует конкретные динамические уравнения для описания спиновой системы, обычно это уравнения Ландау-Лифшица, либо некоторая их модификация. Последнее обстоятельство существенно расширяет область применимости теории в смысле частот и длин волн, а также позволяет исследовать динамику спиновой системы. Тем не менее, использование квазиклассических методов при описании спиновой динамики допустимо отнюдь не для всех систем. В частности, такой подход не применим к системам с сильной одноионной анизотропией, поскольку в этом случае невозможно обойтись без явного учета квантовых состояний магнитных ионов в кристаллическом поле. С другой стороны именно в таких системах следует ожидать особенно сильные магнитоупругие эффекты [8].

В данной работе проводится анализ магнитоупругой связи в магнетиках с большой квантовой одноионной анизотропией. В ходе вычислений используется диаграммная техника для операторов Хаббарда [9, 10, 11, 12], что позволяет точно учесть влияние магнитоупругого взаимодействия и одноионной анизотропии путем включения их в одноузельный гамильтониан. При этом последовательно учитываются как квантовые одноионные эффекты, так и так называемые эффекты нарушенной вращательной инвариантности магнитоупругой энергии системы, находящейся в магнитном поле.

## **1. МОДЕЛЬ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ**

В качестве модельной системы рассматривается полубесконечный легкоплоскостной ферромагнетик ( $XOY$  – базисная плоскость), помещенный в однородное магнитное поле  $H$ , параллельное оси  $OZ$ . Образец жестко закреплен по базисной плоскости. Рассмотрение проводится в области низких температур, в которой исследуемые эффекты проявляются наиболее сильно. Без потери общности будем считать спин магнитного иона  $S = 1$ . Гамильтониан такой системы в рамках вращательно-инвариантной теории МУ взаимодействия [13] имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & -H \sum_n S_n^z - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} J(n-n') \cdot \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'} + \frac{\beta}{2} \sum_n (R_{zi}^{-1} S_n^i)^2 + \\
 & + \nu \sum_n (R_{if}^{-1} S_n^f)(R_{jg}^{-1} S_n^g) \varepsilon_{ij}(n) + \int d\vec{r} \left\{ \frac{(\lambda + \eta)}{2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \right. \\
 & \left. + \eta (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + \lambda (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}) \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где:  $J(n-n')$  – константа билинейного обменного взаимодействия;  $n$  – номер узла в кристалле;  $S_n^i$  –  $i$ -я компонента спинового оператора в узле  $n$ ;  $\beta > 0$  – константа легкоплоскостной одноионной анизотропии;  $\nu$  – константа магнитоупругой связи;  $\lambda$  и  $\eta$  – упругие модули;  $\hat{R}$  – оператор локальных поворотов,  $R_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \omega_{ij} + \omega_{ij}^2/2 + 1/2(u_{ik}\omega_{kj} + \omega_{ik}u_{kj})$ ;  $\varepsilon_{ij} = u_{ij} + 1/2(u_{ik} - \omega_{ik})(u_{kj} + \omega_{kj})$  – тензор конечных деформаций;  $u_{ij} = 1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  и  $\omega_{ij} = 1/2(\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i)$  – симметричная и антисимметричная часть тензора дисторсии  $\partial u_i/\partial x_j$ , соответственно. Нами выбраны граничные условия, при которых образец жестко закреплен в базисной плоскости XOY. Отметим, что при этом в системе существует аксиальная симметрия (ось симметрии – ось OZ), что, как мы увидим далее, существенно сказывается на поведении системы.

Выделяя в гамильтониане (1) среднее поле, получим:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & -\bar{H} \sum_n S_n^z + \frac{J_0}{2} \langle S^z \rangle^2 + \frac{\beta}{2} \sum_n (S_n^z)^2 + \sum_n \tilde{\mathcal{H}}(n) + -\frac{1}{2} \sum_{n,n'} J(n-n') \times \\
 & \times \left\{ (S_n^z - \langle S^z \rangle)(S_{n'}^z - \langle S^z \rangle) + \frac{1}{2} (S_n^+ S_{n'}^- + S_n^- S_{n'}^+) \right\} + \\
 & + \int d\vec{r} \left\{ \frac{(\lambda + \eta)}{2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \eta (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + \lambda (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}) \right\},
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathcal{H}}(n) = \frac{\beta}{2} (R_{zi}^{-1} S_n^i)^2 - \frac{\beta}{2} (S_n^z)^2 + \nu (R_{if}^{-1} S_n^f)(R_{jg}^{-1} S_n^g) \varepsilon_{ij}(n)$ . Полученный в результате одноузельный гамильтониан  $\mathcal{H}_0(n)$  имеет вид:

$$\mathcal{H}_0(n) = -\bar{H} S_n^z + \frac{\beta}{2} (S_n^z)^2 + \tilde{\mathcal{H}}(n), \quad (2)$$

где  $\bar{H} = H + J_0 \langle S^z \rangle$ .

Найдем собственные функции и собственные значения одноузельного гамильтониана (2). Для начала решим уравнение Шредингера для оператора  $\mathcal{L}_0(n)$ , представляющего собой магнитную часть одноузельного гамильтониана:

$$\mathcal{L}_0(n) = -\bar{H} S_n^z + \frac{\beta}{2} (S_n^z)^2. \quad (3)$$

В результате получим следующие выражения для собственных значений и собственных функций оператора  $\mathcal{L}_0(n)$ :

$$\begin{cases} E_1^{(0)} = \frac{\beta}{2} - \bar{H}, \\ E_0^{(0)} = 0, \\ E_{-1}^{(0)} = \frac{\beta}{2} + \bar{H}, \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(1) = |1\rangle, \\ \psi(0) = |0\rangle, \\ \psi(-1) = |-1\rangle, \end{cases} \quad (4)$$

где  $|M\rangle$  есть собственные функции спинового оператора  $S_n^z$ . Построим на базе полученных собственных функций операторы Хаббарда  $X_n^{M'M} \equiv |\Psi_n(M')\rangle\langle\Psi_n(M)|$ , которые описывают переход системы из состояния  $\Psi_n(M)$  в состояние  $\Psi_n(M')$  [9, 10, 11, 12]. Связь спиновых операторов с операторами Хаббарда определяется соотношениями:

$$S_n^z = \sum_{\alpha} \gamma^{\parallel}(\alpha) X_n^{\alpha} + \sum_M \Gamma^{\parallel}(M) H_n^M = H_n^1 - H_n^{-1},$$

$$S_n^+ = \sum_{\alpha} \gamma^{\perp}(\alpha) X_n^{\alpha} = \sqrt{2}(X_n^{10} + X_n^{0-1}), \quad S_n^- = (S_n^+)^{\dagger},$$

где  $H_n^M = X_n^{MM}$ ,  $S_n^+ = S_n^x + i \cdot S_n^y$ .

Подставляя полученные выражения в гамильтониан  $\mathcal{H}_0$ , выразим его через операторы Хаббарда:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_n \mathcal{H}_0(n) = \sum_n \left\{ \sum_M P_M H_n^M + \sum_{\alpha} P_{\alpha} X_n^{\alpha} \right\}. \quad (5)$$

Значения коэффициентов  $P$  мы здесь не приводим ввиду их громоздкости. Используя гамильтониан (5), решаем с ним одноузельную задачу. В результате получим следующее характеристическое уравнение для вычисления энергетических уровней системы:

$$\begin{vmatrix} P_1 - E & P_{(1,0)} & P_{(1,-1)} \\ P_{(0,1)} & P_0 - E & P_{(0,-1)} \\ P_{(-1,1)} & P_{(-1,0)} & P_{-1} - E \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6), находим энергетические уровни:

$$E_k = E_k^{(0)} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad (7)$$

где  $(k=1;0;-1)$ , а  $\zeta$  – поправки к значениям энергии, которые ввиду их громоздкости мы не приводим. Полученные нами поправки к энергетическим уровням магнитной части одноузельного гамильтониана малы по сравнению с величинами внешнего магнитного поля и анизотропии. Поэтому нижайший энергетический уровень определяется именно этими двумя параметрами. При определенном соотношении материальных параметров системы возможна инверсия энергетических уровней. В случае, если  $H \gg \beta$ , нижайшим

уровнем оказывается  $E_1$ , и в системе, реализуется ферромагнитная (ФМ) фаза. В случае  $\beta \gg H$  нижайшим является уровень  $E_0$ , и в системе реализуется квадрупольная (КУ) фаза. И в случае  $H \sim \beta$  энергетические уровни  $E_1$  и  $E_0$  оказываются одного порядка, и в системе реализуется промежуточное состояние – квадрупольно-ферромагнитная (КФМ) фаза.

Воспользуемся выбранными нами граничными условиями для дальнейших вычислений. При креплении образца по базисной плоскости для статической части элементов тензора дилатации и тензора конечных деформаций имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}^{(0)} &= u_{xz}^{(0)} = \omega_{xz}^{(0)} \\ \varepsilon_{zz}^{(0)} &= u_{zz}^{(0)} + \frac{1}{2}(u_{zz}^{(0)})^2 + 2(u_{xz}^{(0)})^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом статическая часть остальных элементов тензора дилатации и тензора конечных деформаций равна нулю. Это позволяет упростить выражения для поправок к энергетическим уровням.

Минимизируя свободную энергию для различных областей значений параметров, получаем следующие значения спонтанных деформаций в различных фазах:

$$\text{ФМ-фаза} - u_{zz}^{(0)} = -\frac{V}{\eta}, \quad u_{xz}^{(0)} = 0;$$

$$\text{КУ-фаза} - u_{zz}^{(0)} = 0, \quad u_{xz}^{(0)} = 0;$$

$$\text{КФМ-фаза} - u_{zz}^{(0)} = -\langle S^z \rangle \frac{V}{\eta}, \quad u_{xz}^{(0)} = 0.$$

Как видим,  $u_{xz}^{(0)} = 0$  во всех трех фазах. Это приводит к тому, что собственные функции гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  совпадают с собственными функциями оператора  $\mathcal{L}_0$  и определяются выражениями (4). Следовательно, связь спиновых операторов с операторами Хаббарда не меняется. Для энергетических уровней получаем в итоге следующие выражения:

$$E_1 = \frac{\beta}{2} - \bar{H} + \frac{V}{2}(u_{zz}^{(0)})^2 + \nu u_{zz}^{(0)}, \quad E_0 = 0, \quad E_1 = \frac{\beta}{2} + \bar{H} + \frac{V}{2}(u_{zz}^{(0)})^2 + \nu u_{zz}^{(0)}, \quad (9)$$

где  $u_{zz}^{(0)} = -\frac{V}{\eta}$  в ФМ-фазе,  $u_{zz}^{(0)} = 0$  в КУ-фазе и  $u_{zz}^{(0)} = -\langle S^z \rangle \frac{V}{\eta}$  в КФМ-фазе.

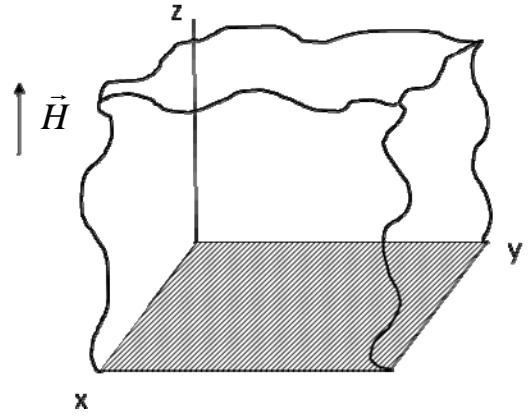


Рис. 1. Геометрия образца.

## 2. ГАМИЛЬТониАН ТРАНСФОРМАЦИЙ. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Для получения гамильтониана трансформаций представим компоненты тензора деформаций в виде  $u_{ij} = u_{ij}^{(0)} + u_{ij}^{(1)}$ , где  $u_{ij}^{(1)}$  – динамическая часть тензора деформаций, соответствующая колебаниям узлов кристаллической решетки. Выделив из полученного нами одноузельного гамильтониана часть, описывающую процессы трансформаций, получим:

$$\mathcal{H}_{tr} = \sum_n \left\{ B_1 H_n^1 + B_2 H_n^0 + B_3 H_n^{-1} + B_4 X_n^{1-1} + B_4^* X_n^{-11} + \right. \\ \left. + B_5 X_n^{01} + B_5^* X_n^{10} + B_6 X_n^{0-1} + B_6^* X_n^{-10} \right\}, \quad (10)$$

где:

$$B_1 = \nu(1 + u_{zz}^{(0)})u_{zz}^{(1)} + \frac{\nu}{2}(u_{xx}^{(1)} + u_{yy}^{(1)}), \quad B_3 = B_1, \\ B_2 = \nu(u_{xx}^{(1)} + u_{yy}^{(1)}), \quad B_4 = \frac{\nu}{2}(u_{xx}^{(1)} - u_{yy}^{(1)} - 2iu_{xy}^{(1)}), \\ B_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \beta(1 - \frac{u_{zz}^{(0)}}{2}) + \nu u_{zz}^{(0)} \right] (\omega_{xz}^{(1)} + i\omega_{xz}^{(1)}) + \frac{\nu}{\sqrt{2}}(1 + \frac{u_{zz}^{(0)}}{2})(u_{zx}^{(1)} + iu_{zy}^{(1)}), \\ B_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \beta(1 - \frac{u_{zz}^{(0)}}{2}) + \nu u_{zz}^{(0)} \right] (-\omega_{xz}^{(1)} + i\omega_{xz}^{(1)}) + \frac{\nu}{\sqrt{2}}(1 + \frac{u_{zz}^{(0)}}{2})(-u_{zx}^{(1)} + iu_{zy}^{(1)}), \quad (11)$$

Проквантуем гамильтониан  $\mathcal{H}_{tr}$ , определив фононные операторы стандартным образом [14]:

$$u_{ij}^{(1)} = \frac{i}{2} \sum_{q,\lambda} \frac{e^{iqn}}{\sqrt{2mN\omega_\lambda(q)}} (e_\lambda^i(q)q_j + e_\lambda^j(q)q_i)(b_{q,\lambda} + b_{-q,\lambda}^\dagger), \\ \omega_{ij}^{(1)} = \frac{i}{2} \sum_{q,\lambda} \frac{e^{iqn}}{\sqrt{2mN\omega_\lambda(q)}} (e_\lambda^i(q)q_j - e_\lambda^j(q)q_i)(b_{q,\lambda} + b_{-q,\lambda}^\dagger),$$

где:  $q_i$  – проекция квазиимпульса на ось  $i$ ;  $e_\lambda^i(q)$  – проекция единичного вектора поляризации на ось  $i$ ;  $N$  – число узлов в кристалле;  $m$  – масса атома;  $\omega_\lambda(q) = \nu_\lambda q$  – закон дисперсии фонона;  $\nu_\lambda$  – скорость  $\lambda$ -поляризованного звука;  $b_{-q,\lambda}^\dagger$  и  $b_{q,\lambda}$  – операторы рождения и уничтожения фононов.

В результате для гамильтониана, описывающего процесс трансформации магнов в фононы и обратно, получим:

$$\mathcal{H}_{tr} = \sum_{\substack{q,\lambda \\ n,\alpha}} (b_{q,\lambda} + b_{-q,\lambda}^\dagger) T_n^\alpha(q, \lambda) X_n^\alpha + \sum_{\substack{q,\lambda \\ n,M}} (b_{q,\lambda} + b_{-q,\lambda}^\dagger) T_n^{MM}(q, \lambda) H_n^M, \quad (12)$$

где  $T_n(q, \lambda)$  – амплитуды трансформаций:

$$\begin{aligned}
 T_n^{11}(q, \lambda) &= \frac{\nu}{2} i \cdot T_n^0(q, \lambda) \left[ 2(1 + u_{zz}^{(0)}) e_{\lambda q}^z q_z + e_{\lambda q}^x q_x + e_{\lambda q}^y q_y \right], \\
 T_n^{-1-1}(q, \lambda) &= T_n^{11}(q, \lambda), \\
 T_n^{00}(q, \lambda) &= \nu \cdot i \cdot T_n^0(q, \lambda) \left[ e_{\lambda q}^x q_x + e_{\lambda q}^y q_y \right], \\
 T_n^{1-1}(q, \lambda) &= \frac{\nu}{2} \cdot i \cdot T_n^0(q, \lambda) e_{\lambda q}^- q^-, \\
 T_n^{01}(q, \lambda) &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot T_n^0(q, \lambda) \left[ \left( \nu - \frac{\beta}{2} \right) e_{\lambda q}^z q^+ + \left( \nu(1 + u_{zz}^{(0)}) + \frac{\beta}{2} \right) e_{\lambda q}^+ q_z \right], \\
 T_n^{0-1}(q, \lambda) &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot T_n^0(q, \lambda) \left[ \left( \nu - \frac{\beta}{2} \right) e_{\lambda q}^z q^- + \left( \nu(1 + u_{zz}^{(0)}) + \frac{\beta}{2} \right) e_{\lambda q}^- q_z \right],
 \end{aligned}$$

где  $q^+ = q_x + iq_y$ ,  $q^- = (q^+)^*$ ,  $e_{\lambda q}^+ = e_{\lambda q}^x + ie_{\lambda q}^y$ ,  $e_{\lambda q}^- = (e_{\lambda q}^+)^*$ ,  $T_n^0(q, \lambda) = \frac{e^{iqn}}{\sqrt{2mN\omega_\lambda(q)}}$ .

В амплитудах трансформаций учтена перенормировка констант магнитоупругой связи, которая определяется слагаемыми, пропорциональными  $u_{zz}^{(0)}$ . Кроме того, необходимо обратить внимание на наличие в амплитудах трансформаций константы одноионной анизотропии. Из этого факта следует, что гибридизация упругих и магнитных возбуждений может быть обусловлена не только магнитоупругой связью, но и одноионной анизотропией. На этот механизм магнитоупругого взаимодействия, связанный с вращательной инвариантностью теории, указывалось в работах [13, 15].

При распространении в кристалле длинноволнового звука магнитные переменные успевают подстроиться под мгновенное значение компонент тензора дисторсии квазистатическим образом. Обговорим процедуру перенормировки упругих модулей. Для этого необходимо в гамильтониане (1) выделить слагаемые, пропорциональные  $u^{(1)}u^{(1)}$ ,  $u^{(1)}\omega^{(1)}$  и  $\omega^{(1)}\omega^{(1)}$ . Полученное выражение усредняется по магнитным переменным. Через средние от магнитных переменных модули упругости зависят от того, в какой магнитной фазе находится система. Подчеркнем, что вклад в перенормировку дают пятое слагаемое в (1) и усредненный по магнитным переменным одноузельный гамильтониан (5).

Приведем явный вид скорости звука для различных направлений волнового вектора и поляризации.

ФМ-фаза:

$q \parallel OY$

$$v_x^2 = \frac{1}{2m}(\eta + \nu), \quad v_y^2 = \frac{1}{m}(\lambda + \eta + \nu/2), \quad v_z^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\beta}{4} + \eta\right);$$

$q \parallel OZ$

$$v_y^2 = v_x^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\beta}{4} + \eta - \nu + \frac{\nu^2}{\eta}\right), \quad v_z^2 = \frac{1}{m}\left(\lambda + \eta - 2\nu + \frac{3\nu^2}{2\eta}\right);$$

КУ-фаза:

$q \parallel OY$

$$v_x^2 = \frac{1}{2m}(\eta + 2\nu), \quad v_y^2 = \frac{1}{m}(\lambda + \eta + \nu), \quad v_z^2 = \frac{1}{2m}\left(\eta + \frac{\beta}{2}\right);$$

$q \parallel OZ$

$$v_y^2 = v_x^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\beta}{2} + \eta + 2\nu\right), \quad v_z^2 = \frac{1}{m}(\lambda + \eta).$$

При сравнении полученных значений скорости звука с результатами работы [5], приходим к выводу, что в случае жесткой фиксации базисной плоскости образца квадрат скорости звука возрастает на величину порядка  $\nu/m$  по сравнению со скоростью звука в свободном образце. Кроме того, скорость звука в КУ-фазе превышает скорость звука в ФМ-фазе.

Перейдем к вычислению спектров связанных магнитоупругих волн. Полная функция Грина определяется выражением

$$G^{\alpha\alpha'}(n, \tau, m, \tau') = -\langle \hat{T} \tilde{X}_n^\alpha(\tau) \tilde{X}_m^{\alpha'}(\tau) \rangle, \quad (13)$$

где  $\hat{T}$  – оператор Вика;  $\tilde{X}_n^\alpha(\tau) = \exp(-\mathcal{H}\tau) X_n^\alpha \exp(\mathcal{H}\tau)$  – оператор Хаббарда в представлении Гейзенберга, усреднение ведется с полным гамильтонианом. Полюсы функции Грина (13) определяют дисперсионное уравнение связанных магнитоупругих волн. Решение дисперсионного уравнения производится отдельно для каждой из трех фаз, поскольку концевые множители и амплитуды трансформаций существенно зависят от фазового состояния системы.

### 3. ФМ-ФАЗА

Спектр низкочастотных квазимагнонов в ФМ-фазе имеет вид:

$$\varepsilon(k) = \frac{J_0}{2}k^2 + H + \frac{\nu^2}{\eta} - \frac{\beta}{2}. \quad (14)$$

При получении спектров квазифононов рассмотрены два направления волнового вектора: по оси  $OY$  и по оси  $OZ$ . При этом для продольной поляризации квазифононов не происходит гибридизации, и спектры остаются линейными по волновому вектору. Спектры поперечно поляризованных квазифононов имеют следующий вид:

$$\omega^2(k) = \omega_t^2(k) \frac{\varepsilon(k) - a_0^{(i)}}{\varepsilon(k)}, \quad (15)$$

где  $\omega_t(k) = \nu k$  – спектр невзаимодействующих  $t$ -поляризованных фононов. Для случая  $\mathbf{k} \parallel OY$   $t$ -поляризация есть поляризация по оси  $OZ$ , а слагаемое  $a_0^{(t)}$  имеет значение:



$$a_0^{(y)} = \frac{\left( v - \beta/2 \left( 1 + v/2\eta \right) \right)^2}{\left( \beta/2 + 2\eta \right)}.$$

В случае  $\mathbf{k} \parallel OZ$  рассматривается поляризация по оси  $OY$ . Слагаемое  $a_0^{(t)}$  при этом имеет вид:

$$a_0^{(z)} = \frac{\left( v - v^2/\eta + \beta/2 \left( 1 + v/2\eta \right) \right)^2}{\left( \beta/2 + 2\eta - 2v + 2v^2/\eta \right)}.$$

Как видно из полученных выражений (14) и (15), ФМ-фаза становится неустойчивой при

$$H_{FM} = \frac{\beta}{2} - \frac{v^2}{\eta} + a_0^{(i)}. \quad (16)$$

При этом значении внешнего поля в спектре квазимагнонов (14) возникает щель, равная  $a_0^{(i)}$ , которая не обращается в ноль. Переход в КФМ-фазу происходит по квазифононной ветви. Спектры квазифонов и квазимагнонов в ФМ-фазе изображены на Рис. 2.

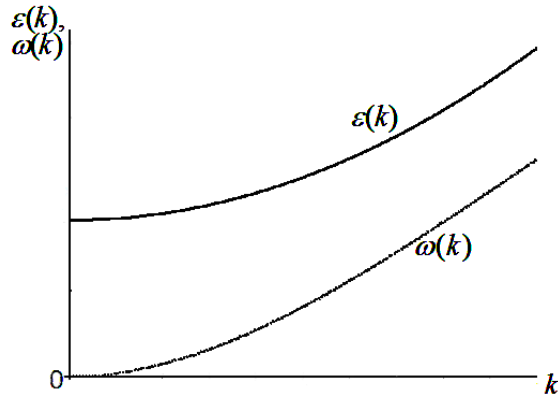


Рис. 2. Спектры квазифонов и квазимагнонов в ФМ-фазе при  $H = H_{FM}$  ( $\mathbf{k} \parallel OY$ ).

Рассмотрим полученные выражения для спектров квазифонов (в двух различных геометриях) вдали от линии фазового перехода, т.е. при  $H - H_{FM} \gg \alpha k^2$ . Здесь  $\alpha = J_0 R_0^2$ ,  $R_0$  – радиус взаимодействия. Из формулы (15) получаем:

$$\omega_y^2(k) = \tilde{v}_{y(z)}^2 k^2, \quad \omega_z^2(k) = \tilde{v}_{z(y)}^2 k^2,$$

где индексом  $y$  частоты указано направление волнового вектора, а в индексе  $z$  скорости в скобках указана поляризация. Выражения для скорости имеют вид

$$\tilde{v}_{y(z)}^2 = v_{y(z)}^2 \frac{H - H_{FM}^{(y)}}{H - H_{FM}^{(y)} + a_0^{(y)}}, \quad \tilde{v}_{z(y)}^2 = v_{z(y)}^2 \frac{H - H_{FM}^{(z)}}{H - H_{FM}^{(z)} + a_0^{(z)}}.$$

Для разности квадратов скоростей с принятой нами точностью, получаем

$$\tilde{v}_{y(z)}^2 - \tilde{v}_{z(y)}^2 = \frac{v}{2m} \cdot \frac{H + \frac{\beta}{2}}{H - \frac{\beta}{2}}. \quad (17)$$

т.е. скорость поперечного звука, распространяющегося вдоль оси  $OY$ , не совпадает со скоростью поперечного звука, распространяющегося вдоль оси  $OZ$ . При этом разность линейна по полю и зависит от величины константы магнитоупругого взаимодействия. Необходимо подчеркнуть, что (17) не зависит от нулевых деформаций и справедлива также в случае недеформированного основного состояния кристалла. Формула (17) отражает нарушение так называемого принципа взаимности для скорости звука. Это связано с нарушением вращательной инвариантности плотности энергии при наличии внешнего поля.

#### 4. КУ-ФАЗА

В рассмотренной нами системе характерным является тот факт, что в спектр квазимагнонов в КУ-фазе не входит константа магнитоупругости:

$$\varepsilon(k) = \sqrt{\frac{\beta}{2} \left( \frac{\beta}{2} - 2J_0 + J_0 k^2 \right)} - H. \quad (18)$$

Т.е. магнитоупругое взаимодействие не оказывает какого-либо влияния на магннуную ветвь спектра в КУ-фазе. Это является следствием обращения в ноль в КУ-фазе магнитного момента на узле, и как следствие, равенство нулю спонтанных деформаций, т.е. фактически следствием симметрии накладываемых на систему механических граничных условий.

Также, как и в ФМ-фазе, продольно поляризованные квазифононы остаются не взаимодействующими. Спектр поперечно поляризованных квазифононов имеет вид:

$$\omega^2(k) = \omega_t^2(k) \frac{\beta - 4a_0^{(i)} (\varepsilon(k) + H)^2 - H^2}{\beta (\varepsilon(k) + H)^2 - H^2}. \quad (19)$$

В случае  $\mathbf{k} \parallel OY$  квазифононы поляризованы по оси  $OZ$ , а для  $a_0^{(i)}$  получаем:

$$a_0^{(y)} = \frac{\left(\nu - \beta/2\right)^2}{\left(\beta/2 + 2\eta\right)}.$$

В случае  $\mathbf{k} \parallel OZ$  поляризация направлена по оси  $OY$ . Слагаемое  $a_0^{(i)}$  имеет вид:

$$a_0^{(z)} = \frac{\left(\nu + \beta/2\right)^2}{\left(\beta + 2\eta + 4\nu\right)}.$$

Из спектра квазифононов (19) определяем поле перехода из КУ-фазы в КФМ-фазу:

$$H_{QU} = \sqrt{(\beta - 4a_0^{(i)})\left(\frac{\beta}{4} - J_0\right)}. \quad (20)$$

Как следует из (20), область существования КФМ-фазы становится шире на величину порядка  $\nu^2/\eta$  по сравнению с [5] за счет уменьшения величины поля перехода из КУ-фазы в КФМ-фазу. Спектры элементарных возбуждений в КУ-фазе представлены на Рис. 3.

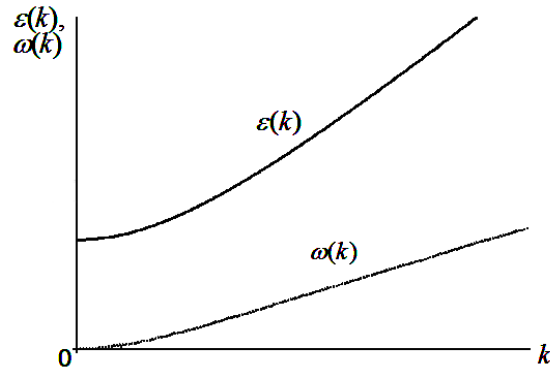


Рис. 3. Спектры квазифононов и квазимагнонов в КУ-фазе при  $H = H_{QU}$  ( $\vec{k} \parallel OY$ ).

Рассмотрим полученные выражения для спектров квазифононов (в двух различных геометриях) вдали от линии фазового перехода, т.е. при  $H - H_{QU} \gg \alpha k^2$ . Из формулы (4.6) получаем:

$$\omega_y^2(k) = \tilde{\nu}_{y(z)}^2 k^2, \quad \omega_z^2(k) = \tilde{\nu}_{z(y)}^2 k^2,$$

где индексом у частоты указано направление волнового вектора, а в индексе у скорости в скобках указана поляризация. Выражения для скорости имеют вид

$$\tilde{v}_{y(z)}^2 = v_{y(z)}^2 \frac{(H_{QU}^{(y)})^2 - H^2}{(H_{QU}^{(y)})^2 - H^2 + 4a_0^{(y)} \left(\frac{\beta}{4} - J_0\right)}$$

$$\tilde{v}_{z(y)}^2 = v_{z(y)}^2 \frac{(H_{QU}^{(z)})^2 - H^2}{(H_{QU}^{(z)})^2 - H^2 + 4a_0^{(z)} \left(\frac{\beta}{4} - J_0\right)}$$

Из этих формул следует, что разность квадратов скоростей с принятой нами точностью равна

$$\tilde{v}_{y(z)}^2 - \tilde{v}_{z(y)}^2 = \frac{v}{m} \cdot \frac{\beta \left(\frac{\beta}{4} - J_0\right) + H^2}{\beta \left(\frac{\beta}{4} - J_0\right) - H^2},$$

и пропорциональна квадрату внешнего магнитного поля. Это связано с тензорным характером параметра порядка КУ-фазы. Квадратичная зависимость от внешнего поля разности скоростей поперечного звука характерна для антиферромагнитных кристаллов. Все комментарии после формулы (17) справедливы и в этом случае.

Исследование спектров связанных магнитоупругих волн полубесконечного сильно анизотропного магнетика, закрепленного по базисной плоскости позволило построить фазовую диаграмму системы в переменных  $(H, \beta)$ . На Рис. 4 представлена фазовая диаграмма исследуемой системы. При сравнении с фазовой диаграммой свободного образца (Рис. 5) [5] обнаруживается существенное изменение областей существования соответствующих фазовых состояний.

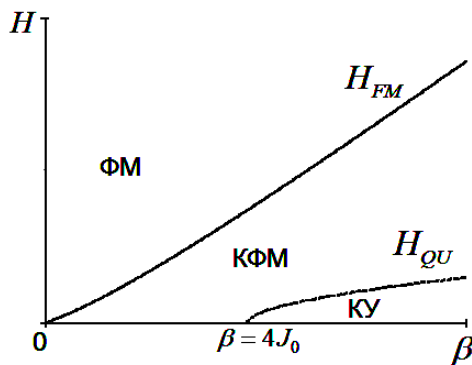


Рис. 4. Фазовая диаграмма легкоплоскостного сильно анизотропного ферромагнетика, жестко закрепленного по базисной плоскости.

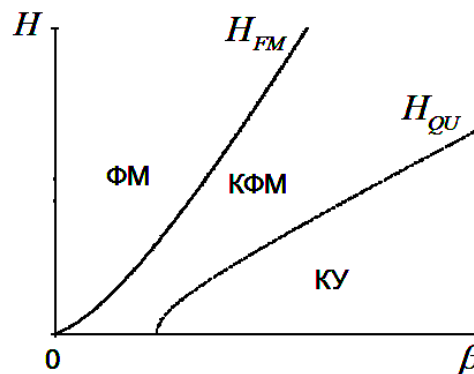


Рис. 5. Фазовая диаграмма свободного легкоплоскостного сильно анизотропного ферромагнетика.

Это изменение видно и при сравнении аналитических выражений для полей перехода:

Закрепленный по базисной плоскости образец

$$H_{FM} = \frac{\beta}{2} - \frac{v^2}{\eta} + a_0^{(i)},$$

$$H_{QU} = \sqrt{(\beta - 4a_0^{(i)}) \left( \frac{\beta}{4} - J_0 \right)}.$$

Свободный образец [5]

$$H_{FM} = \frac{\beta}{2} - \frac{v^2}{2\eta} + \tilde{a}_0^{(i)},$$

$$H_{QU} = \sqrt{\left( \beta + \frac{2v^2}{\eta} - 4\tilde{a}_0^{(i)} \right) \left( \frac{\beta}{4} + \frac{v^2}{2\eta} - J_0 \right)}.$$

Отметим, что при закреплении базисной плоскости происходит увеличение области существования квадрупольно-ферромагнитной фазы. Область существования КФМ-фазы становится шире на величину порядка  $v^2/\eta$  за счет уменьшения величины поля перехода из КУ-фазы в КФМ-фазу. Это связано с обращением в ноль статических деформаций в КУ-фазе.

## ВЫВОДЫ

В результате проведенных исследований нами установлено, что в сильно анизотропном легкоплоскостном ферромагнетике с жестко закрепленной базисной плоскостью оказалась возможной реализация трех фазовых состояний: ферромагнитной (ФМ) фазы при  $H > \beta > J$ , квадрупольной (КУ) фазы при  $\beta > J, H$  и квадрупольно-ферромагнитной (КФМ) фазы при  $H \sim \beta$ . Вычислены спонтанные деформации во всех трех фазах, а также спектры связанных магнитоупругих волн, определена скорость звука, точки фазового перехода по магнитному полю.

При выбранных граничных условиях отличным от нуля оказывается лишь один элемент статической части тензора дисторсии –  $u_{zz}^{(0)}$ . Статическая часть деформаций не влияет на квазимагнионную ветвь спектра в КУ-фазе. Это является следствием обращения в ноль статических деформаций в этой фазе. При другом выборе механических граничных условий ситуация может кардинально измениться. Так, например, при приклейке по плоскости ZOX отличными от нуля будут определенные компоненты тензора дисторсии как в ФМ, так и в КУ-фазе, что приведет к кардинальному изменению динамических свойств системы. Это говорит о существенной зависимости поведения данной системы от симметрии накладываемых граничных условий.

При сравнении полученных результатов с результатами, полученными для свободного образца [5], видно, что в случае фиксации базисной плоскости образца квадрат скорости звука возрастает на величину порядка  $v/m$  по сравнению с квадратом скорости звука в свободном образце.

**Список литературы**

1. Ахиезер А. И. Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках и ферроакустический резонанс / Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 35, вып. 1. – С. 228.
2. Туров Е. А. Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках / Туров Е. А., Шавров В. Г. // УФН. – 1983. – Т. 140, вып. 3. – С. 429.
3. Туров Е. А. Об энергетической щели в ферро- и антиферромагнетиках, связанной с магнитоупругой энергией / Туров Е. А., Шавров В. Г. // ФТТ. – 1965. – Т. 7, вып. 1. – С. 217.
4. Барьяхтар В. Г. Критическая динамика при ферромагнитных фазовых переходах во внешнем поле / Барьяхтар В. Г., Витебский И. М., Лавриненко Н. М., Соболев В. Л. // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 23, вып. 9 – С. 2664-2673.
5. Витебський І. М. Теорія магнітопружних хвиль у сильно анізотропному легко площинному ферромагнетикі з врахуванням обертальної інваріантності / Витебський І. М., Лавриненко Н. М., Майорова А. М., Мицай Ю. М., Фридман Ю. А. // УФЖ. – 1994. – Т. 39. – С. 597-603.
6. Витебский И. М. Вращательно-инвариантная теория магнитоупругих волн в сильно анизотропном легкоплоскостном ферромагнетике / Витебский И. М., Лавриненко Н. М., Майорова А. Н., Мицай Ю. Н., Фридман Ю. А. // Препринт ИМК-93-8. – Харьков: Институт монокристаллов АН Украины. – 1993. – 21 с.
7. Bar'yakhtar V.G. Critical dynamics at ferroelastic phase transitions in an external field / Bar'yakhtar V.G., Vitebskii I. M., Lavrinenko N. M., Sobolev V. L. // JETP. – 1986. – Vol. 90, issue 6 – P. 1111-1117.
8. Фридман Ю. А. Квантовые эффекты в анизотропном ферромагнетике / Фридман Ю. А., Космачев О. А. // ФТТ. – 2009 – Т. 51, вып. 6 – С. 1104-1107.
9. Вальков В. В. Квантовая спин-волновая теория ферромагнетиков с произвольным видом одноионной анизотропии / Вальков В. В., Валькова Т. А., Овчинников С. Г. // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 88, вып. 2. – С. 550.
10. Зайцев Р. О. Обобщенная диаграммная техника и спиновые волны в анизотропном ферромагнетике / Зайцев Р. О. // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68. – С. 207.
11. Fridman Yu. A. Phase states of an  $S = 1$  magnet with anisotropic exchange interaction / Fridman Yu. A., Kosmachev O. A., Klevets Ph. N. // JMMM. – 2008. – Vol. 320, issue 3-4. – P. 435-449.
12. Мицай Ю. Н. Применение операторов Хаббарда в теории магнитоупругих волн / Мицай Ю. Н., Фридман Ю. А. // ТМФ. – 1989 – Т. 81, вып. 2. – С. 263-270.
13. Барьяхтар В. Г. Магнитоупругие возбуждения / Барьяхтар В. Г., Туров Е. А. // Электронная структура и электронные свойства металлов и сплавов. – Киев : Наукова думка, 1988. – С. 39-70.
14. Ландау Л. Д. Статистическая физика. Часть I. Том 5 / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – М. : Наука, 1976. – 583 с.
15. Абрикосов А. А. Методы квантовой теории поля в статистической физике / Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. – М. : Физматгиз, 1962. – 444 с.

**Фридман Ю. А. Динамічні властивості сильно анізотропного легкоплощинного ферромагнетика з урахуванням механічних граничних умов/ Фридман Ю. А., Гореліков Г. А. // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 34-48.**

Досліджено спектри зв'язаних магнітопружних хвиль в напівнескінченному сильно анізотропному легкоплощинному ферромагнетикі з жорстко закріпленою гранню. Отримана фазова діаграма системи, що досліджується. Показано, що на лінях фазових переходів ФМ – КФМ-фаза і КУ-КФМ-фаза квазіфононна мода стає м'якою. Облік обертальної інваріантності приводить до ефекту невзаємності для швидкостей звуку в кристалі. Виявлено, що в зразку із закріпленою гранню швидкість звуку зростає в порівнянні зі швидкістю звуку у вільному (або жорстко закріпленому з усіх боків) зразку, а область існування КФМ-фази стає ширшою.

**Ключові слова:** магнітопружна взаємодія, обертальна інваріантність, ефект невзаємності, фазові переходи.

**Fridman Yu. A. Dynamic properties of strongly anisotropic easy-plane ferromagnet with mechanical boundary conditions/ Fridman Yu. A., Gorelikov G. A. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2012. – Vol. 25(64), No 1. – P. 34-48.**

We investigate spectra of elementary excitations of strongly anisotropic easy-plane semiinfinite ferromagnet, rigidly fixed on a basal plane. The phase diagram of the system was obtained. It was shown, that quasi-phonon mode become soft on lines of phase transitions FM-QFM-phase and QU-QFM-phase. Consideration of rotational invariance lead to the effect of non-reciprocity of sound speed in crystal. Increasing of sound speed in sample in case of fixed basal plan in comparison with sound speed in the free sample and extension of the region of existence of the QFM-phase were discovered.

**Keywords:** magnetoelastic interaction, rotational invariance, effect of non-reciprocity, phase transitions.

*Поступила в редакцию 09.04.2012 г.*