Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 35–50.

УДК УДК 517.984:517.958

В. И. Войтицкий

О НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

Изучаются спектральные свойства линейной начально-краевой задачи, порожденной процессом малых движений сверхтекучей жидкости в открытом сосуде, без учета влияния капиллярных сил. Доказано, что свойства данной задачи аналогичны свойствам задачи о нормальных движениях вязкой жидкости в открытом сосуде. Найдена локализация спектра, получена асимптотика двух ветвей собственных значений, для соответствующих систем собственных элементов установлено свойство p-базисности в некоторых гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: Малые движения, гильбертово пространство, модифицированный операторный пучок С.Г. Крейна, самосопряжённый компактный оператор, классы компактности, асимптотика ветвей собственных значений, p-базисность собственных элементов.

1. Введение. Постановка начально-краевой задачи

Сверхтекучей жидкостью называют жидкость, способную протекать через узкие капилляры без сколько-нибудь заметного сопротивления. Явление сверхтекучести впервые было обнаружено для жидкого гелия при температуре ниже $2,17^\circ$ K в экспериментах П. Капицы в 1938 г. До сих пор жидкий гелий является основной сверхтекучей жидкостью. Его свойства изучены достаточно хорошо, наиболее распространена двухскоростная модели Л.Д. Ландау, согласно которой движение сверхтекучего гелия может быть описано двумя полями скоростей, которые соответствуют движениям сверхтекучей (идеальной) компоненты и нормальной (вязкой) компоненты сверхтекучей жидкости. При этом считается, что в каждый момент времени данные компоненты существуют во всем объеме, занимаемой жидкостью и проникают друг в друга без трения. Данная модель позволила объяснить тот феномен, что сверхтекучий гелий ведет себя в одних опытах как идеальная жидкость, а в других как вязкая жидкость.

В представленной работе на основе модели Л.Д. Ландау сформулирована линейная начально-краевая задача, описывающая малые движения сверхтекучего гелия без учета капиллярных сил. Установлено, что спектральные свойства данной задачи в основном аналогичны свойствам задачи о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде, что соответствует физическому смыслу задачи.

Будем считать, что сверхтекучий гелий частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твердой стенкой S и открытой свободной поверхностью Γ (границу $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ считаем липшицевой). Без учета сил поверхностного натяжения поверхность Γ является в состоянии покоя плоской, расположенной перпендикулярно ускорению достаточно сильного гравитационного поля $\vec{g}$.

Согласно модели Л.Д. Ландау введем поля скоростей сверхтекучей и нормальной компоненты жидкости $\vec{w}(x,t)$ и $\vec{v}(x,t)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ соответственно. Относительное количество их в каждом единичном элементе объема соответственно равно ρ_s/ρ и ρ_n/ρ $(\rho = \rho_s + \rho_n)$, где плотности ρ_s и ρ_n считаем заданными положительными константами. Без учета изменения ряда других физических параметров (энтропия, теплопроводность и др.), что не противоречит физическому смыслу задачи, уравнения Ландау могут быть записаны как соответствующие уравнения движения идеальной и вязкой несжимаемой жидкости (см. [1], с. 184). Выберем систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы начало координат O находилось на Γ и $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, тогда после линеаризации получаем следующие уравнения (см. [1], с. 133):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{w} = 0, \quad (\text{в } \Omega). \tag{2}$$

Здесь, кроме полей скоростей, неизвестными также являются поля динамических давлений p_n и p_s, являющиеся отклонениями давлений нормальной и сверхтекучей компоненты жидкости от соответствующих равновесных давлений p_n^0 и p_s^0. В состоянии покоя (с учетом выбора системы координат) имеем

$$p_n^0(x_3) = c_n - \rho_n g x_3, \quad p_s^0(x_3) = c_s - \rho_s g x_3, \quad c_n + c_s = p_a,$$

где c_n и c_s — некоторые заданные константы, а p_a — постоянное внешнее (атмосферное) давление. Уравнения (1) и (2) — это линеаризованные уравнения Навье-Стокса и Эйлера, описывающие соответственно малые движения вязкой и идеальной несжимаемых жидкостей под действием заданного поля внешних сил $\vec{f}$.

Перейдем теперь к граничным условиям. Будем предполагать, что на твердой стенке S отсутствует поток тепла (стенка теплоизолирована), тогда имеем $\vec{v} \cdot \vec{n} =$

$\vec{w}\cdot\vec{n}=0$ (на S), где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω. Поскольку на нормальную компоненту скорости действуют вязкие напряжения, то также следует положить равной нулю тангенциальную составляющую скорости $\vec{v}$, т.е. $\vec{v}\cdot\vec{\tau}=0$ для любого вектора $\vec{\tau}$ из касательной плоскости к S. Отсюда получаем

$$\vec{v}=\vec{0}, \quad \vec{w}\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S). \tag{3}$$

Считая отклонения движущейся поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ малыми, введем функцию

$$x_3=\zeta(t,x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\Gamma,$$

описывающую в момент времени t малые отклонения Γ вдоль внешней нормали $\vec{n}=\vec{e}_3$. С помощью функции ζ от условий на $\Gamma(t)$ можно перейти к линеаризованным условиям на Γ, а уравнения (1), (2) рассматривать в фиксированной области Ω.

Поскольку в любой момент времени каждая молекула жидкости участвует как в сверхтекучем, так и в нормальном типе движения (см. [1], с. 45, а также [2], с. 707), то нормальные составляющие $\vec{v}$ и $\vec{w}$ на Γ должны совпадать. Иначе на свободной границе будут образовываться зоны, заполненные лишь одной компонентой скорости. Учитывая этот факт, получаем, что на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\vec{v}\cdot\vec{n}=\vec{w}\cdot\vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4}$$

В процессе движения также выполняется условие сохранения объема $\int_\Gamma \zeta d\Gamma=0$ и динамические условия

$$\rho_n\nu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_3}\right)=0, \quad i=1,2, \quad (\text{на } \Gamma), \tag{5}$$

$$p_n+p_s-2\rho_n\nu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\rho g\zeta \qquad (\text{на } \Gamma). \tag{6}$$

Граничные условия (5), (6) обобщают условия на свободной поверхности в задаче о малых колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде (см. [3], п.7.1, а также [4]). В правой части (6) учтено, что сверхтекучая жидкость является тяжелой, т.е. находится под действием гравитационного поля.

Для полной постановки задачи о малых движениях тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде к уравнениям (1), (2) и граничным условиям (4)–(6) необходимо добавить начальные условия

$$\vec{v}(0,x)=\vec{v}^0(x), \quad \vec{w}(0,x)=\vec{w}^0(x), \quad \zeta(0,x_1,x_2)=\zeta^0(x_1,x_2). \tag{7}$$

Данная постановка предложена автору статьи Н.Д. Копачевским. По-видимому, ранее подобная линейная модель сверхтекучей жидкости не рассматривалась. Сформулированная задача является близкой к задаче о малых движениях частично диссипативной гидросистемы в открытом сосуде (см. [6], а также [7], п. 10.2.).

В статье [5] получены естественные достаточные условия существования сильного решения задачи на произвольном отрезке времени $[0;T]$.

2. Операторная постановка начально-краевой задачи

Перед тем, как перейти к изучению спектральной задачи удобно получить операторную постановку начально-краевой задачи (1)–(7). Оказывается, что в данной постановке можно исключить поле сверхтекучей компоненты скорости, при этом для поля вязкой компоненты возникает задача, обобщающая задачу о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде. Чтобы получить этот результат повторим здесь построения статьи [5].

Будем считать, что поля $\vec{v}, \vec{w}$ являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$:

$$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega |\vec{v}|^2 d\Omega < \infty. \tag{8}$$

Требование (8) означает, что в любой момент времени жидкость обладает конечной кинетической энергией.

При исследовании малых движений жидкости в открытом сосуде естественно использовать модифицированное разложение Г. Вейля (см. [3], п. 2.1):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{9}$$

Здесь

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\}, \tag{10}$$

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \text{ (на } S)\} \tag{11}$$

являются подпространствами пространства соленоидальных полей $\vec{J}(\Omega)$, а $\vec{G}(\Omega)$ — пространство потенциальных полей, разлагающееся в прямую сумму (см. [3], с. 106) подпространств

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : \ \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S)\}, \tag{12}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : \ p = 0 \text{ (на } \Gamma)\}. \tag{13}$$

Так как потенциалы p восстанавливаются по полю $\vec{u}$ с точностью до константы, будем предполагать далее, что для них выполнено условие нормировки $\int_\Gamma p\, d\Gamma = 0$. Отсюда потенциалы полей из $\vec{G}(\Omega)$ принадлежат пространству $H^1_\Gamma(\Omega) := H^1(\Omega) \ominus \{1_\Gamma\}$. При этом разложению $\vec{G}(\Omega) = \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}$ соответствует разложение $H^1_\Gamma(\Omega) = H^1_{h,S}(\Omega) \oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. [3], п. 1.3). Здесь и далее, считаем что подпространство $H^1_\Gamma(\Omega)$ снабжено нормой Дирихле $\|p\|^2_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla p|^2\, d\Omega$, которая, как известно, на элементах из $H^1_\Gamma(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме.

Пусть P_0 — ортопроектор из $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$, тогда $(I-P_0)$ — ортопроектор на $\vec{G}(\Omega)$, и справедливо разложение сверхтекучей компоненты

$$\vec{w} = P_0\vec{w} + (I-P_0)\vec{w} =: P_0\vec{w} + \nabla\Phi. \tag{14}$$

Действуя на обе части (2) проектором P_0, имеем $\partial/\partial t P_0\vec{w} = P_0\vec{f}$. Отсюда с учетом начального условия получаем, что составляющая $P_0\vec{w}$ однозначно определяется начальным условием и полем внешних сил по формуле

$$P_0\vec{w} = \int\limits_0^t (P_0\vec{f})(\tau)d\tau + P_0\vec{w}^0.$$

Из постановки задачи следует, что $\vec{w} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Отсюда и из (14) получаем, что $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. В силу (12) потенциал $\Phi \in H^1_\Gamma(\Omega)$ является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{w}\cdot\vec{n} =: \psi \ \ (\text{на } \Gamma). \tag{15}$$

Зададим оператор следа $\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma$ на пространстве $H^1_\Gamma(\Omega)$. Из теоремы Гальярдо (см. [8]) следует, для области Ω с липшицевой границей такой оператор действует ограниченно из $H^1_\Gamma(\Omega)$ на пространство $H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, компактно вложенное в $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. При этом оператор γ_Γ имеет бесконечномерное ядро $H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{u \in H^1_\Gamma(\Omega) : \ u = 0 \ (\text{на } \Gamma)\}$. Известно (см. [3], с. 45-46), что для любого элемента $\psi \in H^{-1/2}_\Gamma := (H^{1/2}_\Gamma)^*$ существует единственное слабое решение $\Phi \in H^1_{h,S}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$ задачи (15), которое определяется через ограниченный оператор $T_\Gamma : \ H^{-1/2}_\Gamma \to H^1_{h,S}(\Omega)$. При этом оператор T_Γ является сопряженным к оператору следа в смысле тождества

$$(\Phi, T_\Gamma\psi)_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \langle\gamma_\Gamma\Phi, \psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall\Phi \in H^1_\Gamma(\Omega), \ \forall\psi \in H^{-1/2}_\Gamma.$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала ψ на элементе $\gamma_\Gamma\Phi \in H^{1/2}_\Gamma$.

Таким образом, решение задачи (15) находится по формуле $\Phi = T_\Gamma\psi = T_\Gamma(\vec{v}\cdot\vec{n})$. Отсюда

$$\Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma\Phi = \gamma_\Gamma T_\Gamma\psi = C_\Gamma(\vec{v}\cdot\vec{n}) \quad (\text{на } \Gamma).$$

Оператор $C_\Gamma := \gamma_\Gamma T_\Gamma$ действует непрерывным образом из $H^{-1/2}_\Gamma$ в $H^{1/2}_\Gamma$, а его сужение на $L_{2,\Gamma}$ является компактным (в силу компактности вложения $H^{1/2}_\Gamma$ в $L_{2,\Gamma}$) самосопряженным положительным оператором в $L_{2,\Gamma}$. При этом обратный положительно определенный оператор C^{-1}_Γ является оператором гильбертовой пары $(H^{1/2}_\Gamma; L_{2,\Gamma})$ (см. [3], с. 41).

Из проделанных построений следует, что поле сверхтекучей компоненты скорости и давление однозначным образом определяются по полю внешних сил $\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega)$, по значению нормальной компоненты поля $\vec{v}$ на границе Γ и по начальным данным

$\vec{w}^0(x) \in \vec{L}_2(\Omega)$, которые в силу постановки должны быть связаны с $\vec{v}^0(x)$ условием согласования $\vec{w}^0 \cdot \vec{n} = \vec{v}^0 \cdot \vec{n}$ (на Γ). Имеем,

$$\vec{w} = P_0\vec{w} + \nabla\Phi = \int\limits_0^t (P_0\vec{f})(\tau)d\tau + P_0\vec{w}^0 + \nabla\left(T_\Gamma\gamma_n\vec{v}\right), \tag{16}$$

$$p_s = -\rho_s\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho_s f_1 = -\rho_s\frac{\partial}{\partial t}\left(T_\Gamma\gamma_n\vec{v}\right) + \rho_s f_1, \tag{17}$$

где

$$\gamma_n\vec{v} := (\vec{v}\cdot\vec{n})|_\Gamma = (v_3)\big|_\Gamma, \tag{18}$$

$$f_1 := f(t,x_1,x_2,0) - \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma f(t,x_1,x_2,0)d\Gamma. \tag{19}$$

Будем использовать теперь модифицированное разложение Вейля (9) применительно к нормальной компоненте скорости $\vec{v}$. Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ из $\vec{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно. Из постановки задачи следует, что $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Поэтому, действуя проектором $P_{0,\Gamma}$ на обе части уравнения (1), получаем

$$\frac{1}{\rho_n}P_{0,\Gamma}\nabla p_n = \nu P_{0,\Gamma}\Delta\vec{v} + P_{0,\Gamma}\vec{f}. \tag{20}$$

Из этого уравнения поле $P_{0,\Gamma}\nabla p_n$ однозначно определяется по полю $\vec{v}$.

Действуя теперь на обе части уравнения (1) проектором $P_{0,S}$, получаем

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla\widetilde{p}_n + \nu P_{0,S}\Delta\vec{v} + P_{0,S}\vec{f},$$

где $\nabla\widetilde{p}_n := (1/\rho_n)P_{0,S}\nabla p_n$. Так как потенциал поля $P_{0,\Gamma}\nabla p_n$ обращается в нуль на Γ, то $\widetilde{p}_n|_\Gamma = (1/\rho_n)p_n|_\Gamma$. Кроме этого, в силу разложения $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, имеем $\nabla\widetilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, поэтому

$$\Delta\widetilde{p}_n = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial\widetilde{p}_n}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \qquad \int\limits_\Gamma \widetilde{p}_n\,d\Gamma = 0. \tag{21}$$

Таким образом, разрешимость исходной задачи (1)–(7) сводится к разрешимости следующей начально-краевой проблемы:

$$-\nu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla\widetilde{p}_n = \vec{\Phi}(:= P_{0,S}\vec{f} - \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}) \quad (\text{в } \Omega), \tag{22}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{23}$$

$$\nu\tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1,2, \quad (\text{на } \Gamma), \tag{24}$$

$$-\widetilde{p}_n + \nu\tau_{33}(\vec{v}) = -\psi(:= -\frac{\rho}{\rho_n}g\zeta - \frac{\rho_s}{\rho_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_\Gamma\gamma_n\vec{v}\right) + \frac{\rho_s}{\rho_n}f_1) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{25}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \gamma_n\vec{v} \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \int\limits_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0, \tag{26}$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0,x_1,x_2) = \zeta^0(x_1,x_2). \tag{27}$$

Здесь через

$$\tau_{ij}(\vec{v}) := \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,2,3,$$

обозначены компоненты тензора деформации нормальной компоненты жидкости. Краевое условие (25) получено с учетом соотношения (17). Неизвестными в задаче считаем поле $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и функцию $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, определяемые по правым частям $\vec{\Phi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\psi \in L_{2,\Gamma}$. Поле давлений $\nabla \widetilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ однозначно определяется через поле $\vec{v}$ из условий (21) и (25).

Будем искать решение задачи (22)–(27) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач. Именно, пусть неизвестное поле давлений $\widetilde{p}_n$ представимо в виде суммы полей p_1 и p_2, где $p_1 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta p_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \int\limits_{\Gamma} p_1 \, d\Gamma = 0,$$

и является компонентой решения первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна:

$$-\nu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_1 = \vec{\Phi} - \nabla p_2, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{28}$$

$$\vec{v} = \vec{0} \qquad (\text{на } S), \tag{29}$$

$$\nu\tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1,2, \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{30}$$

$$-p_1 + \nu\tau_{33}(\vec{v}) = 0 \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{31}$$

а $p_2 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ является решением задачи Зарембы для уравнения Лапласа

$$\Delta p_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad p_2 = \psi \ \ (\text{на } \Gamma). \tag{32}$$

Очевидно, что если задачи (28)–(31) и (32) имеют решения, то тогда поле давлений $\widetilde{p}_n = p_1 + p_2$ и поле скорости $\vec{v}$ (решение задачи (28)–(31)) являются решениями задачи (22)–(27).

Предположим, что поле $\vec{v}$ является функцией переменной t со значениями в подпространстве

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\}$$

пространства векторных полей $\vec{H}^1(\Omega)$. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии в жидкости, скорость которой вычисляется по формуле

$$\rho_n \nu E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2}\rho_n\nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega. \tag{33}$$

С помощью неравенства Корна (см., например, [3], п. 2.2.6) можно доказать, что введенная посредством (33) квадратичная форма $E(\vec{u},\vec{u})$ на подпространстве $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$

определяет норму, эквивалентную стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$. При этом пространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

В статье [5] установлены такие результаты:

Лемма 1. *Задача* (28)–(31) *имеет единственное решение* $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *(*p_1 *определяется через* $\vec{v}$*) для любой правой части* $\vec{\Phi} - \nabla p_2 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$*. При этом оператор задачи* $A : \mathcal{D}(A) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ *является самосопряженным положительно определенным оператором гильбертовой пары* $(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$.

Лемма 2. *Задача* (32) *имеет единственное решение* $p_2 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ *для любой правой части* $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$*. При этом* $\nabla p_2 = G\psi$*, где* G *— оператор, осуществляющий изометрию между* $H^{1/2}_\Gamma$ *и* $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Отсюда решение задачи (22)–(27) удовлетворяет соотношению $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) = A^{-1}(\vec{\Phi}+G(-\psi))$. Применяя к обеим частям полученного равенства оператор A и вспоминая определения выражений $\vec{\Phi}$ и $(-\psi)$, получаем, что задача (22)–(27) равносильна системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu A\vec{v} + \left(\frac{\rho g}{\rho_n}\right) G\zeta + \frac{\rho_s}{\rho_n} G \frac{d}{dt}(C_\Gamma \gamma_n)\vec{v} = \frac{\rho_s}{\rho_n} G f_1 + P_{0,S}\vec{f}, \tag{34}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_n \vec{v}, \tag{35}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0) = \zeta^0(x_1, x_2). \tag{36}$$

Здесь уравнение (34) рассматривается в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а (35) — в пространстве $L_{2,\Gamma}$. При этом, для решений задачи $\vec{v} \in \mathcal{D}(A)$, а $\zeta \in H^{1/2}_\Gamma$.

3. Сведение спектральной задачи к модифицированному пучку С.Г Крейна

Будем искать решения исходной однородной начально-краевой задачи в виде нормальных движений $\vec{v}(x,t) = e^{-\lambda t}\vec{v}(x)$, $\vec{w}(x,t) = e^{-\lambda t}\vec{w}(x)$, $\zeta(x,t) = e^{-\lambda t}\zeta(x)$. Поскольку задача (1)–(7) сводится к исследованию проблемы (34)–(36), то соответствующая спектральная задача может быть сведена к подобной задаче, где символ d/dt нужно заменить на $-\lambda$. Получаем задачу

$$-\lambda\vec{v} + \nu A\vec{v} + \left(\frac{\rho g}{\rho_n}\right) G\zeta - \lambda\frac{\rho_s}{\rho_n} G C_\Gamma \gamma_n \vec{v} = 0,$$

$$-\lambda\zeta = \gamma_n\vec{v}$$

в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$.

Осуществим замену

$$\vec{\eta} = A^{1/2}\vec{v} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \vec{v} = A^{-1/2}\vec{\eta},$$

и воспользуемся обозначением $\alpha := \rho g/\rho_n$, тогда

$$-\lambda A^{-1/2}\vec{\eta} + \nu A^{1/2}\vec{\eta} + \alpha G\zeta - \lambda\frac{\rho_s}{\rho_n}GC_\Gamma\gamma_n A^{-1/2}\vec{\eta} = 0, \tag{37}$$

$$-\lambda\zeta = \gamma_n A^{-1/2}\vec{\eta}. \tag{38}$$

Обозначим

$$Q := \gamma_n A^{-1/2}:\ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}, \quad Q^+ := A^{-1/2}G:\ H_\Gamma^{1/2} \to \vec{J}_{0,S}(\Omega). \tag{39}$$

Справедливо следующее утверждение (см. [5]):

Лемма 3. *Оператор Q является компактным. При этом $Q^+ \subset Q^*$, $Q^+ = Q^*\big|_{\mathcal{D}(G)}$, $\overline{Q^+} = Q^*$.*

Применим к обеим частям (37) ограниченный в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ оператор $A^{-1/2}$. Тогда с помощью операторов Q и Q^+ получаем

$$-\lambda A^{-1}\vec{\eta} + \nu\vec{\eta} + \alpha Q^+\zeta - \lambda\frac{\rho_s}{\rho_n}Q^+C_\Gamma Q\vec{\eta} = 0, \tag{40}$$

$$-\lambda\zeta = Q\vec{\eta}. \tag{41}$$

В случае $\lambda = 0$ имеем

$$Q\vec{\eta} = 0, \quad \nu\vec{\eta} + \alpha Q^+\zeta = 0. \tag{42}$$

Отсюда в силу того, что $Q = \gamma_n A^{-1/2}$, имеем $A^{-1/2}\vec{\eta} = \vec{v} \in \operatorname{Ker}\gamma_n$. Далее, применяя к обеим частям второго равенства (42) ограниченный оператор Q, получаем $QQ^+\zeta = 0$. Отсюда $A^{-1}G\zeta \in \operatorname{Ker}\gamma_n$. Поскольку ядро оператора γ_n является бесконечномерным, то число $\lambda = 0$ является собственным значением бесконечной кратности.

Будем далее предполагать, что $\lambda \neq 0$. Заменяя в (40) оператор Q^+ на его расширение Q^*, выразим ζ из (41) и подставим его в (40). Тогда от задачи (40)–(41) приходим к задаче на собственные значения для пучка

$$L(\lambda)\vec{\eta} := \nu\vec{\eta} - \lambda\left(A^{-1} + \frac{\rho_s}{\rho_n}Q^*C_\Gamma Q\right)\vec{\eta} - \frac{\alpha}{\lambda}Q^*Q\vec{\eta} = 0 \tag{43}$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Введем ограниченные в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ операторы

$$\mathcal{A} := A^{-1} + \frac{\rho_s}{\rho_n}Q^*C_\Gamma Q, \quad \mathcal{B} := \alpha Q^*Q. \tag{44}$$

Справедливо утверждение

Лемма 4. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются самосопряженными компактными в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом $\mathcal{A}$ является положительным, а $\mathcal{B}$ — неотрицательным оператором,* $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Ker}Q = \{\vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}:\ A^{-1/2}\vec{\eta}\cdot\vec{n} = 0\}$ *является бесконечномерным подпространством $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.*

Доказательство. Действительно, оператор $\mathcal{B}$ самосопряжен, поскольку $(Q^*Q)^* = Q^*Q^{**} = Q^*Q$. Он компактен в силу компактности оператора Q. Так как оператор A^{-1} самосопряжен и компактен в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а C_Γ самосопряжен и компактен в $L_{2,\Gamma}$, то оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным и компактным.

Положительность оператора $\mathcal{A}$ следует из положительности оператора A^{-1} и неотрицательности $Q^*C_\Gamma Q$. Поскольку также неотрицательным является оператор Q^*Q, то оператор $\mathcal{B}$ неотрицателен. Его ядро, очевидно, совпадает с бесконечномерным ядром оператора $Q = \gamma_n A^{-1/2}$. □

С учетом обозначений (44) получаем задачу

$$L(\lambda)\vec{\eta} := \nu\vec{\eta} - \lambda\mathcal{A}\vec{\eta} - \lambda^{-1}\mathcal{B}\vec{\eta} = 0. \tag{45}$$

Заметим, что при $\rho_s = 0$ мы имеем в точности пучок С.Г. Крейна, возникающий при изучении малых движений вязкой жидкости в открытом сосуде (см. [9], [3]). Поэтому данную оператор-функцию назовем модифицированным пучком С.Г. Крейна.

4. Изучение свойств операторного пучка

В силу леммы 4 пучок (45) является пучком С.Г. Крейна. Оказывается, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сохраняют то же асимптотическое поведение собственных значений, что и в задаче о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде.

Для оператора Q^*Q асимптотика собственных значений известна (см. [3], с. 306). Из нее следует, что

$$\lambda_n(\mathcal{B}) = \alpha\left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty). \tag{46}$$

Для того чтобы найти асимптотику собственных значений оператора $\mathcal{A}$ нам понадобятся некоторые свойства классов компактных операторов в гильбертовом пространстве. С каждым компактным оператором A связывают невозрастающую последовательность его сингулярных чисел ($s-$чисел). По определению,

$$s_n(A) := \lambda_n((A^*A)^{1/2}), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{47}$$

Скорость сходимости сингулярных чисел к нулю выделяет из множества $\mathfrak{S}_\infty$ линейные подклассы операторов $\mathfrak{S}_p$. Именно, оператор $A \in \mathfrak{S}_p$ $(p \geq 1)$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty.$$

Введем также классы компактных операторов $\Sigma_p,\ \Sigma_p^0$ $(p \geq 1)$. Будем говорить, что $A \in \Sigma_p$, $B \in \Sigma_p^0$, если

$$s_n(A) = O(n^{-1/p}), \quad n \to \infty, \tag{48}$$

$$s_n(B) = o(n^{-1/p}), \quad n \to \infty. \tag{49}$$

Из определения следует, что Σ_p и Σ_p^0 являются линейными множествами, причем справедливы такие включения

$$\mathfrak{S}_p \subset \Sigma_p^0 \subset \Sigma_p \subset \mathfrak{S}_{p'}, \quad \forall p' > p \geq 1. \tag{50}$$

На основании данных определений получаем, что

$$\mathcal{B} \in \Sigma_2 \subset \mathfrak{S}_p \quad (\text{при } p > 2). \tag{51}$$

Лемма 5. *Для всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\lambda_{m+n-1}(Q^* C_\Gamma Q) \leq \lambda_m(Q^* Q) \cdot \lambda_n(C_\Gamma).$$

Доказательство. Известно (см., например, [11], с. 250, а также [12]), что собственные значения компактного оператора находятся как последовательные “минимаксы” соответствующего вариационного отношения. Имеем

$$\lambda_{m+n-1}(Q^* C_\Gamma Q) = \min_{M_{m+n-2}} \max_{u \perp M_{m+n-2}} \frac{(Q^* C_\Gamma Q u, u)}{(u,u)}, \tag{52}$$

где минимум берется по всевозможным $(m+n-2)$–мерным линеалам $M_{m+n-2} \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Он достигается в случае, если этот линеал является линейной оболочкой собственных элементов, соответствующих первым $m+n-2$ собственным значениям. Максимум достигается на собственном элементе u оператора $Q^* C_\Gamma Q$, отвечающем собственному значению $\lambda_{m+n-1}(Q^* C_\Gamma Q) > 0$. Поскольку собственные элементы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то $u \perp \operatorname{Ker} Q^* C_\Gamma Q = \operatorname{Ker} Q$. Поэтому максимумы в вариационном отношении (52) можно искать среди элементов пространства $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \operatorname{Ker} Q$.

Пусть $M_\varphi := \operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ — линейная оболочка, натянутая на собственные элементы оператора $Q^* Q$, соответствующие первым (с учетом кратности) $m-1$ собственным значениям, а $M_{Q^*\psi} := \operatorname{sp}\{Q^*\psi_1, Q^*\psi_2, \ldots, Q^*\psi_{n-1}\}$, где $\psi_i \in L_{2,\Gamma}$ $(i = \overline{1, n-1})$ — собственные элементы оператора C_Γ, соответствующие первым $n-1$ собственным значениям. Составим подпространство

$$M := \operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, Q^*\psi_1, Q^*\psi_2, \ldots, Q^*\psi_{n-1}\}.$$

Оно имеет размерность не выше $m+n-2$, поэтому справедливо неравенство

$$\lambda_{m+n-1}(Q^* C_\Gamma Q) \leq \max_{u \perp M} \frac{(Q^* C_\Gamma Q u, u)}{(u,u)} = \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Qu, Qu)} \cdot \frac{(Qu, Qu)}{(u,u)}.$$

Поскольку максимум произведения функций не превосходит произведения максимумов сомножителей, и $M_{Q^*\psi}^\perp \supset M^\perp$, $M_\varphi^\perp \supset M^\perp$, то

$$\begin{aligned} \lambda_{m+n-1}(Q^* C_\Gamma Q) &\leq \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Qu, Qu)} \cdot \frac{(Qu, Qu)}{(u,u)} \leq \\ &\leq \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Qu, Qu)} \cdot \max_{u \perp M} \frac{(Q^* Q u, u)}{(u,u)} \leq \max_{u \perp M_{Q^*\psi}} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Qu, Qu)} \cdot \max_{u \perp M_\varphi} \frac{(Q^* Q u, u)}{(u,u)}. \end{aligned} \tag{53}$$

Очевидно, что второй сомножитель в правой части (53) равен $\lambda_m(Q^*Q)$. Докажем, что первый сомножитель равен $\lambda_n(C_\Gamma)$.

Обозначим $Q\big|_{\mathcal{H}} := \widetilde{Q}$. Осуществим замену $\eta := Qu \in L_{2,\Gamma}$. Так как $u \in \mathcal{H}$, то $u = \widetilde{Q}^{-1}\eta$. Свойство $u \perp M_{Q^*\psi}$ означает, что для всех элементов $Q^*\psi_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ выполнено равенство $(u, Q^*\psi_i) = 0$. Отсюда

$$(u, Q^*\psi_i) = (\widetilde{Q}^{-1}\eta, Q^*\psi_i) = (Q\widetilde{Q}^{-1}\eta, \psi_i)_{L_{2,\Gamma}} = (\eta, \psi_i)_{L_{2,\Gamma}} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, выполнено свойство $\eta \perp M_\psi := \mathrm{sp}\,\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\}$, значит

$$\max_{u \perp M_{Q^*\psi}} \frac{(C_\Gamma Qu, Qu)}{(Qu, Qu)} = \max_{\eta \perp M_\psi} \frac{(C_\Gamma \eta, \eta)}{(\eta, \eta)} = \lambda_n(C_\Gamma).$$

□

Для дальнейшего нам понадобиться следующее важное утверждение (см. [13], с. 52, а также [14]).

Теорема 1 (Фань-Цюй). *Если A и B — компактные операторы, для которых справедливы соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A) = a, \quad \lim_{n\to\infty} n^r s_n(B) = 0 \quad (r > 0), \tag{54}$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A + B) = a. \tag{55}$$

Очевидно, если операторы A и B являются неотрицательными, то всюду в теореме сингулярные числа можно заменить на равные им собственные значения операторов.

Известно (см. [3], с. 306), что для оператора A^{-1} справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n(A^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{2/3} n^{-2/3}[1 + o(1)] =: c_{A^{-1}} n^{-2/3}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty). \tag{56}$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\lambda_n(A^{-1}) = c_{A^{-1}} > 0. \tag{57}$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\lambda_n(Q^*C_\Gamma Q) = 0. \tag{58}$$

Действительно, пусть $n = 2m + j$, $j = 0, 1$. Тогда согласно лемме 5 имеем $\lambda_n(Q^*C_\Gamma Q) = \lambda_{(m+j)+(m+1)-1}(Q^*C_\Gamma Q) \le \lambda_{m+j}(Q^*Q) \cdot \lambda_{m+1}(C_\Gamma)$. Известно (см. [3]), что для операторов Q^*Q и C_Γ справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_n(Q^*Q) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}[1 + o(1)] =: c_{Q^*Q} n^{-1/2}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty), \tag{59}$$

$$\lambda_n(C_\Gamma) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{4\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}[1 + o(1)] =: c_{C_\Gamma} n^{-1/2}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty). \tag{60}$$

Отсюда получаем

$$0 \le \lim_{n\to\infty} n^{2/3}\lambda_n(Q^* C_\Gamma Q) \le \lim_{m\to\infty}(2m+j)^{2/3} c_{Q^*Q}(m+j)^{-1/2} c_{C_\Gamma}(m+1)^{-1/2} \le$$
$$\le c_{Q^*Q} c_{C_\Gamma} \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+j)^{2/3}}{m^{1/2} m^{1/2}} = c_{Q^*Q} c_{C_\Gamma} \lim_{m\to\infty} \left(2+\frac{j}{m}\right)^{2/3} \frac{1}{m^{2/3}} = 0. \quad (61)$$

Очевидно, справедливость соотношений (61) не зависит от выбора значения $j = 0, 1$.

Замечание. Справедливость равенства (58), по-видимому, следует также из общих свойств классов компактных операторов в гильбертовом пространстве. Именно, согласно асимптотическим формулам (59), (60) имеем $Q^*Q \in \Sigma_2$, $C_\Gamma \in \Sigma_2$. Тогда произведение этих операторов принадлежит классу Σ_1. По-видимому, этому же классу принадлежит оператор $Q^* C_\Gamma Q$. Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ имеем $Q^* C_\Gamma Q \in \Sigma^0_{1+\varepsilon} \subset \Sigma^0_{3/2}$. Последнее эквивалентно равенству (58).

Таким образом, из справедливости соотношений (57), (58) по теореме Фань-Цюй следует асимптотическое поведение собственных значений оператора $\mathcal{A}$:

$$\lambda_n(\mathcal{A}) = c_{A^{-1}} n^{-2/3}[1+o(1)] = \left(\frac{\text{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{2/3} n^{-2/3}[1+o(1)] \quad (n\to\infty). \qquad (62)$$

Такое же асимптотическое поведение собственных значений наблюдается в задаче о собственных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Из установленной асимптотики следует, что

$$\mathcal{A} \in \Sigma_{3/2} \subset \mathfrak{S}_p \quad (\text{при } p > 3/2). \qquad (63)$$

На основании полученной степенной асимптотики операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для модифицированного пучка С.Г. Крейна (45) справедливо утверждение, доказанное Н.Д. Копачевским (см. [16], [17]).

Теорема 2 (о p-базисности собственных элементов пучка С.Г. Крейна)**.** *Пусть для пучка С.Г. Крейна $L(\lambda) = I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ выполнены условия*

$$A = A^* \in \mathfrak{S}_{p_A}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_{p_B}(\mathcal{H}),$$
$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad \dim \mathcal{H}_0 := \dim \operatorname{Ker} B \ge 0, \quad \dim \mathcal{H}_1 := \dim\{\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0\} = \infty,$$
$$4\|A\|\cdot\|B\| < 1, \quad r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\|\cdot\|B\|})/(2\|A\|).$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка $[-r_-, r_-]$, после проектирования на $\mathcal{H}_1$ образует p-базис в $\mathcal{H}_1$ при

$$p \ge p_0, \quad p_0^{-1} = p_A^{-1} + p_B^{-1}.$$

При тех же p система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала $(-r_+, r_+)$, образует p-базис в $\mathcal{H}$.

Определение 1. Будем говорить, следуя В.А. Пригорскому (см. [15]), что базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ является p-базисом ($0 < p \le \infty$) гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если

$$\psi_n = (I+T)\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $T \in \mathfrak{S}_p$, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис $\mathcal{H}$.

Таким образом, задача о нормальных движениях тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде сводится к изучению модифицированного пучка С.Г. Крейна (45) с сохранением всех его основных свойств. Применяя теорему 2 к пучку (45) и используя теорему об асимптотике собственных значений пучка С.Г. Крейна (см. [3], п. 7.2, а также [10]), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Спектр задачи, порожденной проблемой* (1)–(7), *состоит из бесконечнократного нулевого собственного значения, а также из конечнократных собственных значений (дискретная часть спектра), расположенных в правой комплексной полуплоскости с предельными точками* 0 *и* $+\infty$.

1. Если $\nu^2 > 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, то дискретный спектр состоит из двух ветвей положительных собственных значений:

$$\lambda_k^+ = \nu\lambda_k(\mathcal{A}^{-1})[1+o(1)] = \nu \left(\frac{\mathrm{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{-2/3} k^{2/3}[1+o(1)] \to +\infty \ (k \to \infty), \tag{64}$$

$$\lambda_k^- = \nu^{-1}\lambda_k(\mathcal{B})\,[1+o(1)] = \frac{\alpha}{\nu}\left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} k^{-1/2}[1+o(1)] \to +0 \quad (k \to \infty). \tag{65}$$

При этом

$$\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty} \subset [r_+, +\infty), \quad \{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, r_-], \tag{66}$$

где

$$r_\pm = (\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|})/(2\|\mathcal{A}\|).$$

Система собственных элементов $\vec{\eta} = A^{1/2}\vec{v}$, отвечающая ветви $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, образует p-базис в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ при $p \ge p_0 = ((3/2)^{-1} + 2^{-1})^{-1} = 6/7$, а система собственных элементов, отвечающая ветви $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, после проектирования образует p-базис в подпространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ при тех же p.

2. Если $\nu^2 \le 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, то кроме двух упомянутых выше ветвей положительных собственных значений имеется конечное число невещественных собственных значений, расположенных зеркально относительно вещественной оси в секторе

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\,\lambda \ge r_+, \ |\lambda| \le r_-\}. \tag{67}$$

В этом случае система собственных элементов, отвечающая двум ветвям положительных собственных значений образует p-базис (при $p > 6/7$) с конечным дефектом в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ соответственно.

Автор выражает благодарность проф. Н.Д. Копачевскому за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы

[1] Паттерман С. *Гидродинамика сверхтекучей жидкости.* – М.: Мир, 1978. – 520 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* – М.: Наука, 1986. – 734 с.

[3] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[4] Крейн С.Г. *О колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде.* // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 2. – С. 262-265.

[5] Войтицкий В.И. Малые движения тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде // Нелинейные граничные задачи. – 2009. – Т. 19. – С. 29–48.

[6] Закора Д.А. *Малые движения частично диссипативной гидродинамической системы*// Межведомственный научный сборник "Динамические системы". – №15. – 1999. – С. 149-154.

[7] Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid.* — Birkhäuser Verlag. – Basel – Boston – Berlin. 2003. — 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).

[8] Gagliargo E. *Caratterizzazioni delletrace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova. –V.27. – 1957. – P. 284-305.

[9] Аскеров Н.К. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения / Н.К. Аскеров, С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2, № 2. – С. 21-32.

[10] Кожевников А.Н. Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи/ А.Н. Кожевников // Матем. Заметки. – 1977. – Т. 22, № 5. – С. 699-710.

[11] Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б.-С. Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

[12] Курант Р. Методы математической физики. Том 1. / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.: Наука, 1951. – 526 с.

[13] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

[14] Ky Fan. Maximum Properties and Inequalities for the Eigenvalues of Completely Continuous Operators / Fan Ky // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1951. – Vol. 37. – P. 760-766.

[15] Пригорский В.А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства / В.А. Пригорский // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, № 5, вып. 125. – С. 231–236.

[16] Копачевский Н.Д. О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ / Н.Д. Копачевский // Функциональный анализ и его приложения. – Т. 15, вып. 2. – 1981. – С. 77-78.

[17] Копачевский Н.Д. О p-базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I-\lambda A-\lambda^{-1}B$ / Н.Д. Копачевский // Сборник научных трудов “Функциональный анализ и прикл. матемтика”. – К: Наукова Думка, 1982. – С. 43-55.

Про нормальні рухи важкої надтекучої рідини у відкритій посудині

Вивчаються властивості спектру лінійної початково-крайової задачі, породженої процесом малих рухів надтекучої рідини у відкритій посудині, без урахування впливу капілярних сил. Доведено, що властивості данної проблеми аналогічні властивостям задачі про нормальні рухи важкої в'язкої рідини у відкритій посудині. Досліджена локалізація спектру, знайдена асимптотика двох гілок власних значень, для відповідних систем власних елементів встановлена p-базисність у деяких гільбертових просторах.

Ключові слова: інтегродиференціальне рівняння.

On the normal motions of a heavy superfluid in an open vessel

We consider the spectral properties of linear initial boundary value problem, generated by process of small motions of a heavy superfluid in an open vessel. In considering model capillary forces are neglected. We proved that properties of this problem is analogous to properties of the problem on normal motions of a viscous fluid in an open vessel. We find localization of the spectrum, asymptotics of two branches of eigenvalues with p-basis property of corresponding eigenfunctions in some Hilbert spaces.

Keywords: Small motions, Hilbert space, modified operator pencil of S.G. Krein, compact self-adjoint operator, compact classes, eigenvalues asymptotics, p-basis property of eigenelements.