Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 40–51.

УДК 517.972

Е. В. Божонок

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА H^1

Найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта класса $W^2K_2(z)$ вариационного функционала в H^1. Описан общий вид вариационного функционала, удовлетворяющего стационарной форме условий Лежандра–Якоби. Получены условия существования нелокального K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: вариационный функционал, K–экстремум, пространство Соболева.

Введение. Предварительные сведения

Начиная с 20–х годов прошлого века и вплоть до настоящего времени, основное внимание математиков, исследовавших чрезвычайно важные для приложений вариационные задачи в пространствах Соболева, уделялось задачам на абсолютный экстремум и условный абсолютный экстремум (см. [1], [2]). Однако такой подход жестко ограничивает класс допустимых интегральных функционалов.

Глубинные причины отсутствия неабсолютных локальных экстремумов у вариационных функционалов в пространствах Соболева были вскрыты в замечательной теореме И.В. Скрыпника ([3]), которая исключает (в неквадратичном случае) применение традиционных аналитических методов нахождения локального экстремума и по сути свидетельствует *об отсутствии неабсолютных локальных экстремумов* в рассматриваемой ситуации.

Дальнейшее исследование экстремальных задач в классическом пространстве Соболева $H^1([0;T])$ с нормой

$$\|y\|_{H^1} = \left(\int_0^T |y(x)|^2 dx + \int_0^T |y'(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

привело в работах И.В. Орлова ([4], [5]) к введению понятия компактного экстремума (K–экстремума), а также понятий компактной непрерывности (K–непрерывности), компактной дифференцируемости (K–дифференцируемости) и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в банаховых подпространствах, порожденных всеми абсолютно выпуклыми компактами в исходном пространстве. В работах ([4], [6]) было показано, что в пространстве Соболева H^1 вариационный функционал для широкого класса интегрантов обладает свойством повторной компактной дифференцируемости. Кроме того, в ([7], [8]) перенесены на случай K–экстремума классические необходимые условия и достаточные условия локального экстремума для вариационного функционала в пространстве C^1.

В настоящей статье найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$ (попадание интегранта в данный класс является достаточным условием повторной K–дифференцируемости вариационного функционала в H^1). Получены условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1, найден общий вид интегранта, удовлетворяющего данным условиям. Проведено исследование на нелокальность K–экстремума в нуле вариационного функционала. Рассмотрены конкретные примеры.

Приведем необходимые определения и результаты ([4]–[8]).

Определение 1. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\Phi : H \to \mathbb{R}$. Говорят, что функционал Φ имеет *компактный экстремум* (*K–экстремум*) в точке $y \in H$, если для любого компактного эллипсоида $C_\varepsilon \subset H$ сужение Φ на $(y + span\, C_\varepsilon)$ имеет в точке y локальный экстремум относительно гильбертовой нормы $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденной C_ε.

Определение 2. Говорят, что отображение $f : [0;T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление

$$f(x,y,z) = A(x,y,z) + B(x,y,z) \cdot z + C(x,y,z) \cdot z^2, \tag{1}$$

можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C_y \subset \mathbb{R}$ отображения A, B, $C \in W_K(z)$, т.е. равномерно непрерывны и ограничены на $T_C = [0;T] \times C_y \times \mathbb{R}$, с аналогичным требованием на градиенты ∇_{yz} и гессианы H_{yz} отображений A, B и C (в этом случае говорят, что отображения A, B, $C \in W^2_K(z)$).

В [6] было получено следующее достаточное условие повторной K–дифференцируемости вариационного функционала в пространстве Соболева $H^1([0;T])$.

Теорема 1. *Если $f \in W^2K_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_0^T f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in H^1([0;T]), \tag{2}$$

дважды K–дифференцируем всюду на $H^1([0;T])$; при этом

$$\Phi''_K(y)(h,k) \quad = \quad \int_0^T \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h,k) \; + \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}((h',k) \; + \; (h,k')) \; + \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h',k')\Big]dx. \tag{3}$$

Аналогом классического необходимого условия локального экстремума вариационного функционала для нахождения K-экстремума (2) в пространстве $H^1([0;T])$, является *обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа* ([5]).

Теорема 2. *Если, в предположениях теоремы 1:*

(i) *функционал* (2) *имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in H^1([0;T])$;*
(ii) *функция $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')$ абсолютно непрерывна на $[0;T]$;*

то выполнено обобщенное уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L(f)(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) = 0 \quad \text{п.в. на } [0;T]. \tag{4}$$

В частности, условие (ii) выполнено, если $(\partial f/\partial z) \in C^1([0;T] \times \mathbb{R}^2)$, $y(\cdot) \in W^{2,2}([0;T])$.

Решения уравнения (4), при выполнении условия (ii) теоремы 2, называются *K–экстремалями* функционала (2) в пространстве $H^1([0;T])$.

Приведем также *обобщенное достаточное условие Лежандра–Якоби* ([7]) строгого K–экстремума в случае пространства Соболева $H^1([0;T])$.

Теорема 3. *Пусть $f : [0;T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in W^2K_2(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала (2) в $H^1_0([0;T])$ и функции $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x), y'(x))$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y(x), y'(x))$ абсолютно непрерывны на K–экстремали $y(\cdot)$. Если на K–экстремали $y(\cdot)$:*

1) выполнено усиленное условие Лежандра, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad \text{всюду на } [0;T];$$

2) выполнено обобщенное условие Якоби, т.е. любое решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x))u'\right) + \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y(x), y'(x))\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x), y'(x))\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \tag{5}$$

в классе $H^1([0;T])$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, не обращается в нуль при $0 < x \leq T$, то функционал Эйлера–Лагранжа (2) имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.

1. Минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$

Рассмотрим $f \in W^2K_2(z)$, т.е.

$$f(x,y,z) = A(x,y,z) + B(x,y,z) \cdot z + C(x,y,z) \cdot z^2,$$

где A, B, $C \in W_K(z)$, с аналогичным представлением для градиента $\nabla_{yz} f$ и гессиана $H_{yz} f$.

Так как функция f дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ по (y,z), то применяя в точке $(x,y,0)$ формулу Тейлора 2–го порядка по z, получаем:

$$f(x,y,z) = f(x,y,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0) \cdot z + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,0) \cdot \frac{z^2}{2} + \varphi(x,y;z), \tag{6}$$

где $\varphi(x,y;z) = o(z^2)$ при $z \to 0$ локально равномерно по x, y. Положим:

$$R(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,0) + \frac{\varphi(x,y;z)}{z^2} \quad \text{при} \quad z \neq 0; \qquad R(x,y,0) = 0.$$

Тогда $R \in W_K(z)$, и обозначая $P(x,y) = f(x,y,0)$, $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)$, из (6) получаем:

$$f(x,y,z) = P(x,y) + Q(x,y) \cdot z + R(x,y,z) \cdot \frac{z^2}{2}, \tag{7}$$

где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K(z)$.

Теперь, используя равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot z + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{z^2}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Q + R \cdot z + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{z^2}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot z + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \cdot \frac{z^2}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \cdot z + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \cdot \frac{z^2}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = R + 2\frac{\partial R}{\partial z} \cdot z + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cdot \frac{z^2}{2}, \tag{8}$$

из условий $\nabla_{yz} f \in WK_2(z)$, $H_{yz} f \in WK_2(z)$ получаем, что $\nabla_{yz} R \in W_K(z)$, $H_{yz} R \in W_K(z)$, т.е. в представлении (7) $R \in W_K^2(z)$.

Обратно, если выполнено представление (7), где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K^2(z)$, то $f \in W^2K_2(z)$. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Представление (7) функции f, где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K^2(z)$, является необходимым и достаточным для принадлежности f классу $W^2K_2(z)$.*

2. Условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1

Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_0^T \left(R(x,y,y') \cdot \frac{y'^2}{2} + Q(x,y)\cdot y' + P(x,y) \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0;T]), \quad (9)$$

где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K^2(z)$.

Отметим, что, согласно теореме 4, интегрант

$$f(x,y,z) = R(x,y,z) \cdot \frac{z^2}{2} + Q(x,y)\cdot z + P(x,y)$$

принадлежит классу $W^2K_2(z)$. Отсюда, по теореме 1, введенный выше функционал определен всюду и дважды K–дифференцируем в $H_0^1([0;T])$.

Рассмотрим теперь условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала (9).

1) Из равенств (8) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) = Q(x,0). \quad (10)$$

Тогда, подставляя (10) в вариационное уравнение Эйлера–Лагранжа (4) на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ $(0 \le x \le T)$ для функционала (9) и учитывая, что, в силу $f \in C^2$, $(d/dx)[f(x,0,0)] = (d/dx)[Q(x,0)]$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,0) \equiv 0. \quad (11)$$

2) Изучим теперь условия выполнения достаточного условия Лежандра–Якоби строгого K–экстремума для функционала $\Phi(y)$ в пространстве Соболева H_0^1 (теорема 3) на K–экстремали $y_0(\cdot)$. Отметим вначале, что необходимо наложить на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ дополнительное требование абсолютной непрерывности функций

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) = Q(x,0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,0).$$

i) *Усиленное условия Лежандра*, в случае K–минимума, всюду на $[0;T]$ для функционала (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,0,0) = R(x,0,0) > 0. \quad (12)$$

ii) *Условие Якоби*: из равенств (8) уравнение Якоби для функционала (9) на K–экстремали $y_0(\cdot)$

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,0,0)u'\right] + \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,0,0)\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0,0)\right] u \overset{\text{п.в.}}{=} 0$$

принимает вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[R(x,0,0)u'\right]+\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,0)\right)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0)\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

или, с учетом $f \in C^2$,

$$-\frac{d}{dx}\left[R(x,0,0)u'\right]+\left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0)-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}(x,0)\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \tag{13}$$

с начальными условиями $u(0)=0$, $u'(0)=1$.

Рассмотрим теперь достаточные условия выполнимости условия Якоби.

Примем следующие дополнительные условия:

$$R(x,0,0)\equiv r>0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)(x,0)\equiv p. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$ru''-pu=0, \quad u(0)=0,\ \ u'(0)=1. \tag{16}$$

Рассмотрим различные возможные случаи: $p=0$, $p>0$, $p<0$.

а) $p=0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=0$, откуда решение $u(x)=x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, при любом $T>0$.

б) $p>0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=\frac{p}{r}u$, где $\frac{p}{r}>0$, откуда решение $u(x)=\sqrt{\frac{r}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{r}}x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, при любом $T>0$.

в) $p<0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=-\left|\frac{p}{r}\right|u$ (при этом $\frac{p}{r}<0$), откуда решение $u(x)=\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}\sin\sqrt{\left|\frac{p}{r}\right|}x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, лишь при $T<\pi\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}$.

Назовем условия (11)–(14)–(15) (обеспечивающие выполнение достаточных условий Лежандра–Якоби в нуле) стационарной формой условий Лежандра–Якоби (в нуле), или условиями (SLJ).

3. Общий вид интегранта, удовлетворяющего условиям (SLJ) в нуле

Наша задача в этом пункте — описать *все* интегранты $f(x,y,z)$ вариационного функционала (9) класса $W^2K_2(z)$, удовлетворяющие условиям (11)–(14)–(15):

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,0)\equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)(x,0)\equiv p, \quad R(x,0,0)\equiv r>0, \tag{17}$$

где P, Q, R — коэффициенты минимального представления (7) интегранта f; P, $Q\in C^2$; $R\in W^2_K(z)$.

1) Выберем $P(x,y) \in C^2$ произвольно. Тогда первое из уравнений (17) дает:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,0)\right) \Leftrightarrow \left(Q(x,0) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + C_1\right),$$

откуда

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + \widetilde{Q}(x,y), \quad \text{где} \quad \widetilde{Q}(x,0) \equiv C_1. \tag{18}$$

2) Из второго уравнения в (17) получаем:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0) - p. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (19), получаем:

$$\left(\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0) - p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}(x,0) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + C_2\right),$$

откуда

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}(x,y) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \widetilde{q}(x,y), \quad \text{где} \ \ \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2.$$

Интегрируя теперь по y, получаем:

$$\widetilde{Q}(x,y) = \int\limits_0^y ds \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \int\limits_0^y \widetilde{q}(x,s)ds + C_1, \quad \text{где} \ \ \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (18), получаем:

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + \int\limits_0^y ds \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \int\limits_0^y \widetilde{q}(x,s)ds + C_1, \ \text{где} \ \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2,$$

или, обозначая $\widetilde{q}(x,y) = q(x,y) - q(x,0) + C_2$, после несложных преобразований:

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial y}(t,0) + y \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0)\right] dt + \int\limits_0^y [q(x,s) - q(x,0)]ds + (C_1 + C_2 y - p \cdot xy), \tag{21}$$

где следующая функция $q \in C^2$ и константы C_1 и C_2 произвольны.

3) Полагая

$$R(x,y,z) = r(x,y,z) - r(x,0,0) + r, \tag{22}$$

мы также получаем последнее из условий (17): $R(x,0,0) \equiv r$, Подставляя, наконец, (21)–(22) в (7), получаем искомый результат:

$$f(x,y,z) = P(x,y) + \left\{ \int\limits_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial y}(t,0) + y \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) \right] dt + \int\limits_0^y [q(x,s) - q(x,0)] ds + \right.$$

$$\left. +(C_1 + C_2 y - p \cdot xy) \right\} \cdot z + [r(x,y,z) - r(x,0,0) + r] \cdot \frac{z^2}{2}, \tag{23}$$

где следующие функции и константы $P(x,y) \in C^2$, $q(x,y) \in C^2$, $r(x,y,z) \in W_K^2(z)$; C_1 и C_2 — произвольны.

4. Свойства отображений класса $W_K^2(z)$

Для практического применения формулы (23) необходимо иметь в своем распоряжении достаточно обширные классы отображений $R(x,y,z) \in W_K^2(z)$. С этой целью рассмотрим некоторые легко проверяемые свойства таких отображений.

Обозначим вначале через $W^2(z)$ класс отображений $\varphi(z)$, для которых $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\varphi''(z)$ равномерно непрерывны и ограничены при $-\infty < z < \infty$.

Тогда справедливы следующие утверждения

Предложение 1. *Если*

$$R(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x,y) \cdot \beta_k(z), \quad \text{где} \quad \alpha_k \in C^2, \quad \beta_k \in W^2(z),$$

то $R \in W_K^2(z)$.

Предложение 2. *Если* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$; $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in C^2$, *то* $\varphi(R_1(x,y,z), \ldots, R_m(x,y,z)) \in W_K^2(z)$.

Следствие 1. *Из условий* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$, $\alpha_k(x,y) \in C^2$ $(k = \overline{1,m})$ *следует, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x,y) R_k(x,y,z) \in W_K^2(z).$$

Последнее следствие 1 обобщает предложение 1, так как

$$\beta_k \in W^2(z) \Rightarrow \beta_k \in W_K^2(z).$$

Следствие 2. *Если* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$, *то* $R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_m \in W_K^2(z)$.

Предложение 3. *Если* $R(x,y,z) \in W_K^2(z)$, $\psi(z) \in W^2(z)$, *то* $R(x,y,\psi(z)) \in W_K^2(z)$.

Отметим также некоторые свойства класса $W^2(z)$, используемого в предыдущих конструкциях.

Обозначим через $C_b^n(z)$ — класс функций $\varphi(z) \in C^n$, имеющих ограниченные производные до n–го порядка.

Свойство 1. *Справедливы вложения:* $C_b^3(z) \subset W^2(z) \subset C_b^2(z)$.

Свойство 2. *Если* $\varphi \in C^2$, φ *периодическая, то* $\varphi \in W^2(z)$.

Свойство 3. *Если* $\varphi \in C^2$, $\varphi^{(k)}$ $(\pm\infty)$ *существуют и конечны при* $k = 0, 1, 2$, *то* $\varphi \in W^2(z)$.

5. Условия нелокальности K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1

Вначале отметим, что если функционал (9) достигает строгого K–минимума в нуле, то в любой окрестности $U(0) \subset H^1$ найдутся значения y, для которых $\Phi(y) > \Phi(0)$. Таким образом, Φ *не может достигать локального максимума в нуле.*

Рассмотрим теперь условия, при которых функционал (9) не имеет локального минимума в нуле.

Пусть интегрант функционала (9) удовлетворяет условиям (17), т.е. имеет вид (23) и Φ достигает строгого K–минимума в нуле. Предположим для удобства, что $\Phi(0) = 0$. В силу (23), это означает, что

$$\int_0^T P(x,0)dx = 0.$$

Последнее условие заведомо выполняется, если потребовать, чтобы

$$P(x,0) \equiv 0. \tag{24}$$

Введем также дополнительные условия:

$$Q(0,0) = 0, \tag{25}$$

что, в силу (23), равносильно условию $C_1 = 0$, а также *условие знакопеременности* R: при некотором z_0

$$R(x,0,z_0) \le -r_0 < 0 \qquad (\forall\ x \in [0;T]). \tag{26}$$

Покажем, что при выполнении условий (24)– (26) $\Phi(y)$ *не достигает локального минимума в нуле.*

Положим, при достаточно малых $\varepsilon > 0$,

$$y^\varepsilon(x) = \begin{cases} z_0(x-\varepsilon), & \text{при} \quad 0 \le x \le \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad \varepsilon \le x \le T. \end{cases}$$

Очевидно, $y^\varepsilon \in H_0^1([0;T])$, при этом

$$\|y^\varepsilon\|_{H^1}^2 = \int_0^\varepsilon \left(z_0^2(x-\varepsilon)^2 + z_0^2\right) dx = z_0^2\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Интегрант f на функции y^ε принимает вид:

$$f(x, y^\varepsilon, (y^\varepsilon)') =$$

$$= \begin{cases} R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0) \cdot \frac{z_0^2}{2} + Q(x, z_0(x-\varepsilon)) \cdot z_0 + P(x, z_0(x-\varepsilon)), & 0 \le x \le \varepsilon; \\ 0, & \varepsilon \le x \le T. \end{cases}$$

Отсюда

$$\Phi(y^\varepsilon) = \frac{z_0^2}{2} \cdot \int\limits_0^\varepsilon R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0)dx + z_0 \cdot \int\limits_0^\varepsilon Q(x, z_0(x-\varepsilon))dx + \int\limits_0^\varepsilon P(x, z_0(x-\varepsilon))dx. \quad (27)$$

При этом

$$\begin{cases} \text{из (24) вытекает, что} & P(x, z_0(x-\varepsilon)) = o(1) \\ \text{из (25) вытекает, что} & Q(x, z_0(x-\varepsilon)) = o(1) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0. \\ \text{из (26) вытекает, что} & R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0) = -r_0 + o(1) \end{cases} \quad (28)$$

Из (27)–(28) получаем:

$$\Phi(y^\varepsilon) \le o(\varepsilon) + z_0 \cdot o(\varepsilon) + \frac{z_0^2}{2} \cdot [o(\varepsilon) - r_0\varepsilon] = -\frac{z_0^2 r_0}{2}\varepsilon + o(\varepsilon) < 0$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Таким образом, функционал (9) не может достигать локального минимума в нуле, и, следовательно, *не достигает локального экстремума в нуле*. Следовательно, произвольный вариационный функционал $\Phi(y)$ с интегрантом, удовлетворяющим условиям (17) и (24)–(26), *достигает в нуле нелокального K–минимума.*

Итак, подведем итоги нашего рассмотрения.

Теорема 5. *Рассмотрим функционал вида*

$$\Phi(y) = \int\limits_0^T \left(R(x, y, y') \cdot \frac{y'^2}{2} + Q(x, y) \cdot y' + P(x, y) \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0; T]),$$

где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K^2(z)$.

В предположениях:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, 0) \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right)(x, 0) \equiv p, \quad R(x, 0, 0) \equiv r > 0,$$

$$P(x, 0) \equiv 0, \quad Q(0, 0) = 0,$$

а также при условии знакопеременности R: при некотором z_0

$$R(x, 0, z_0) \le -r_0 < 0 \qquad (\forall\, x \in [0; T]);$$

вариационный функционал $\Phi(y)$ имеет ***нелокальный K–минимум в нуле*** *при любом $T \in (0; +\infty)$, если $p \ge 0$, и при $0 < T < \pi\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}$, если $p < 0$.*

Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 1. Рассмотрим функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{1/3} \left((y')^2 \left(\sin(1+\cos y') - \frac{1}{2} \right) + y' \sin y^2 + y^2 \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0;1/3]).$$

В данном случае имеем

$$P(y) = y^2, \quad Q(y) = \sin y^2, \quad R(z) = 2\sin(1+\cos z) - 1.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия (17) и (24)–(26) для функционала $\Phi(y)$ выполнены, при этом имеем:

$$R(0) \equiv r = 2\sin 2 - 1 > 0,$$

а при $z = \pi \quad R(\pi) = -1 < 0$.

Таким образом, так как в нашем случае $p \equiv 2 > 0$ и $T = 1/3$, то в силу теоремы 5 функционал $\Phi(y)$ имеет нелокальный K–минимум в нуле.

Пример 2. Рассмотрим функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{1} \left(y^3 \lg(x^2+4) + y' \sin xy + \frac{(y')^2 \cos y'}{2(1+(y')^2)} \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0;1]).$$

В данном случае имеем

$$P(x,y) = y^3 \lg(x^2+4), \quad Q(x,y) = \sin xy, \quad R(z) = \frac{\cos z}{1+z^2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия (17) и (24)–(26) для функционала $\Phi(y)$ выполнены, при этом имеем:

$$R(0) \equiv r = 1 > 0,$$

а при $z = \pi \quad R(\pi) = -1/(1+\pi^2) < 0$.

Таким образом, так как в нашем случае $p \equiv -1 < 0$, а $T = 1 < \pi$, то в силу теоремы 5 функционал $\Phi(y)$ имеет нелокальный K–минимум в нуле.

Выводы

В статье найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$. Получены условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1, найден общий вид интегранта, удовлетворяющего данным условиям. Проведено исследование на нелокальность K–экстремума в нуле вариационного функционала. Рассмотрены конкретные примеры.

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] *Оптимальное управление* / [Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г. и др.]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[2] Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations.* — New York: Springer–Verlag, 1989. — 228 p.

[3] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[4] Орлов И.В. *K–дифференцируемость и K–экстремумы* // Украинский математический вестник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97–115.

[5] Orlov I.V. *Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals* // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland, 2009. — Vol. 190. — P. 397–417.

[6] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.

[7] Божонок Е.В., Орлов И.В. *Условия Лежандра и Якоби для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространстве Соболева* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 3, № 4. — С. 282–293.

[8] Bozhonok E.V. *Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space H^1* // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland, 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.

Умови існування нелокальних компактних екстремумів варіаційних функціоналів у просторі Соболєва H^1

Знайдено мінімальне псевдоквадратичне зображення інтегранта класу $W^2K_2(z)$ варіаційного функціонала в H^1. Описано загальний вид варіаційного функціонала, що задовольняє стаціонарну форму умови Лежандра–Якобі. Отримано умови існування нелокального K–екстремуму в нулі варіаційного функціонала в просторі H^1. Розглянуто приклади.

Ключові слова: варіаційний функціонал, K–екстремум, простір Соболєва.

Conditions of existence of nonlocal compact extrema of variational functionals in Sobolev space H^1

The minimal pseudoquadratic representation of $W^2K_2(z)$ class integrands of variation functionals in H^1 is derived. A general form of variational functional satisfying stationary form of Legendre–Jacobi condition is described. The conditions of existence of nonlocal K–extremum at zero of variation functional in space H^1 are obtained. Some examples are considered.

Keywords: variational functional, K–extremum, Sobolev space.