Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 1 (2007), с. 64–69.

Д. А. Закора

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В работе исследована задача Коши для некоторого интегродифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. Это уравнение тесно связано с задачей о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченном объеме. Доказана теорема о сильной разрешимости изучаемой задачи Коши.

Постановка задачи

В банаховом пространстве E рассматривается следующая задача Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (I+C)B^2u + \int\limits_0^t K(t,s)B^2u(s)\,ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \qquad (1)$$

где B — генератор сильно непрерывной группы операторов в E, операторы BC, $(I+C)^{-1}$ и оператор-функция $K(t,s)$ ограничены в E.

Задача вида (1), рассматриваемая в некотором гильбертовом пространстве H и с оператором $B^2 = -A$, где A — положительно определенный оператор, возникает при исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в ограниченном объеме (см.[1], с. 390-410, [2], [3]). Здесь рассматривается обобщение соответствующей задачи Коши на случай банахова пространства E.

Исследование задачи Коши

Дадим следующее определение.

Определение 1. (см. [4], с. 291) Сильным решением задачи Коши (1) назовем функцию $u(t)$ такую, что $u(t) \in \mathcal{D}(B^2)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(B)$ для любого t из $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$, $B^2u(t)$, $Bu'(t) \in C(\mathbb{R}_+;E)$, $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+;E)$, выполнены начальные условия и уравнение (1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Оператор B является генератором сильно непрерывной группы операторов в банаховом пространстве E, поэтому его резольвентное множество не пусто. Пусть $\lambda_0 \in \rho(B)$. Положим $B_0 := B - \lambda_0 I$, тогда имеет место следующее тождество (см. [4], с. 298):

$$B^2 = (B_0 + 2\lambda_0 I + \lambda_0^2 R_B(\lambda_0))B_0 =: (B_0 + G_0)B_0, \quad R_B(\lambda_0) := (B - \lambda_0 I)^{-1}. \tag{2}$$

Преобразуем уравнение из (1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (I+C)\Big((B_0+G_0)B_0u + (I+C)^{-1}\int\limits_0^t K(t,s)(B_0+G_0)B_0u(s) + (I+C)^{-1}f(t)\Big).$$

Осуществим здесь замену $B_0u = \xi$ и преобразуем полученное соотношение к системе двух уравнений первого порядка в банаховом пространстве E:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = (B_0 + B_0C)\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = (B_0+G_0)\xi + (I+C)^{-1}\displaystyle\int\limits_0^t K(t,s)(B_0+G_0)\xi(s)\,ds + (I+C)^{-1}f(t). \end{cases} \tag{3}$$

Начальные условия для системы (3) имеют вид:

$$\xi(0) = B_0u^0, \quad \eta(0) = (I+C)^{-1}B_0^{-1}\xi'(0) = (I+C)^{-1}u^1. \tag{4}$$

Введем новые функции

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta. \tag{5}$$

Из (3) вытекает, что эти функции удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = B_0x + \dfrac{1}{2}(B_0C+G_0)x + \dfrac{1}{2}(-B_0C+G_0)y + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(I+C)^{-1}\displaystyle\int\limits_0^t K(t,s)(B_0+G_0)(x(s)+y(s))\,ds + (I+C)^{-1}f(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = -B_0y + \dfrac{1}{2}(B_0C-G_0)x + \dfrac{1}{2}(-B_0C-G_0)y - \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}(I+C)^{-1}\displaystyle\int\limits_0^t K(t,s)(B_0+G_0)(x(s)+y(s))\,ds - (I+C)^{-1}f(t) \end{cases} \tag{6}$$

с начальными условиями

$$x(0) = B_0u^0 + (I+C)^{-1}u^1, \quad y(0) = B_0u^0 - (I+C)^{-1}u^1. \tag{7}$$

Систему (6) вместе с начальными условиями (7) запишем в виде одного интегродифференциального уравнения первого порядка в сдвоенном банаховом пространстве $\mathcal{E} := E \oplus E$:

$$\frac{dz}{dt} = (\mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_1)z + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)(\mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_2)z(s)\,ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения:

$$z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z^0 := \begin{pmatrix} B_0u^0 + (I+C)^{-1}u^1 \\ B_0u^0 - (I+C)^{-1}u^1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 := \mathrm{diag}(B_0; -B_0),$$

$$\mathcal{Q}_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B_0C + G_0 & -B_0C + G_0 \\ B_0C - G_0 & -B_0C - G_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_2 := \mathrm{diag}(G_0; -G_0),$$

$$\mathcal{K}(t,s) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (I+C)^{-1}K(t,s) & -(I+C)^{-1}K(t,s) \\ -(I+C)^{-1}K(t,s) & (I+C)^{-1}K(t,s) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}(t) := ((I+C)^{-1}f(t); -(I+C)^{-1}f(t))^t.$$

Оператор $\mathcal{B}_0$ является генератором сильно непрерывной группы в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, операторы $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ и оператор-функция $\mathcal{K}(t,s)$ ограничены в $\mathcal{E}$. Отсюда, в частности, следует, что оператор $\mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_1$ также является генератором сильно непрерывной группы в банаховом пространстве $\mathcal{E}$ (см. [4], с. 185, теорема 7.5).

Дальнейшее исследование связано с изучением задачи Коши (8). В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 2. Сильным решением задачи Коши (8) назовем функцию $z(t)$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}_0 z(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $z(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $z(0) = z^0$ и выполнено уравнение из (8) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Докажем однозначную разрешимость задачи Коши (8).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1. $\mathcal{K}(t,s),\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}(t,s) \in C(0 \leqslant s \leqslant t < \infty; \mathcal{L}(\mathcal{E}))$,
2. $\mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$,

тогда для любого $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$ существует и единственно сильное решение задачи Коши (8).

Доказательство. Оператор $\mathcal{B}_0$ — генератор сильно непрерывной группы в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, а оператор $\mathcal{Q}_1$ ограничен в $\mathcal{E}$, поэтому, как уже отмечалось (см. [4], с. 185, теорема 7.5), $\mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_1$ — также генератор сильно непрерывной группы операторов в $\mathcal{E}$. Отсюда следует, что существует $\lambda_1 \in \rho(\mathcal{B}_0 +$

$\mathcal{Q}_1$). Осуществим в задаче Коши (8) замену $z(t) = \exp(\lambda_1 t)w(t)$. Получим

$$\frac{dw}{dt} = \mathcal{B}_1 w + \int\limits_0^t \mathcal{K}_1(t,s)\mathcal{B}_2 w(s)\,ds + \mathcal{F}_1(t), \quad w(0) = z^0, \tag{9}$$

где $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_1 - \lambda_1 I$, $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_0 + \mathcal{Q}_2$, $\mathcal{K}_1(t,s) := \exp(-\lambda_1(t-s))\mathcal{K}(t,s)$, $\mathcal{F}_1(t) := \exp(-\lambda_1 t)\mathcal{F}(t)$. Оператор $\mathcal{B}_1$ снова является генератором сильно непрерывной группы $\mathcal{U}(t) = \exp(t\mathcal{B}_1)$ в $\mathcal{E}$, при этом $\mathcal{D}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_2) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{B}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Очевидно, что из однозначной сильной разрешимости задачи (9) следует разрешимость задачи Коши (8).

Предположим теперь, что $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$ и задача Коши (9) имеет сильное решение $w(t)$. Тогда

$$w(t) = \mathcal{U}(t)z^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}_1(s)\,ds + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\left\{\int\limits_0^s \mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau)\,d\tau\right\} ds =$$

$$= \mathcal{U}(t)z^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}_1(s)\,ds + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau)\,ds. \tag{10}$$

Преобразуем внутренний интеграл в (10). Поскольку $w(\tau) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_2) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$ и $\mathcal{K}_1(t,s)$ непрерывно дифференцируема по t, то существует частная производная:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t-s)\mathcal{B}_1^{-1}\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau) =$$

$$= -\mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau) + \mathcal{U}(t-s)\mathcal{B}_1^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau).$$

Проинтегрируем это соотношение по s в пределах τ от до t:

$$\int\limits_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau)\,ds = \mathcal{B}_1^{-1}\Big(-\mathcal{K}_1(t,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau) + \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{K}_1(\tau,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}_1(s,\tau)\mathcal{B}_2 w(\tau)\,ds\Big) =: \mathcal{B}_1^{-1}\mathcal{K}_2(t,\tau)w(\tau). \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем, что сильное решение $w(t)$ задачи Коши (9) удовлетворяет следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$w(t) = \widehat{w}(t) + \int\limits_0^t \mathcal{B}_1^{-1}\mathcal{K}_2(t,s)w(s)\,ds, \quad \text{где} \quad \widehat{w}(t) := \mathcal{U}(t)z^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}_1(s)\,ds. \tag{12}$$

Здесь $\widehat{w}(t)$ решение задачи Коши (9) без интегрального слагаемого, поэтому $\widehat{w}(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\mathcal{B}_1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$.

Покажем, что уравнение (12) имеет единственное решение, которое и является сильным решением задачи Коши (9). Для этого введем пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_1} := (\mathcal{D}(\mathcal{B}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{B}_1})$, где $\|y\|_{\mathcal{B}_1} := \|\mathcal{B}_1 y\|$ для любого $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_1)$. Известно, что $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_1}$ банахово пространство.

Из (11) и условий теоремы следует, что $\mathcal{B}_1^{-1}\mathcal{K}_2(t,s) \in C(0 \leqslant s \leqslant t < +\infty; \mathcal{L}(\mathcal{E}_{\mathcal{B}_1}))$. Таким образом получаем, что уравнение (12), рассматриваемое в $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_1}$, является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. Отсюда и из включения $\widehat{w}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}_{\mathcal{B}_1})$ следует, что уравнение (12) имеет единственное решение $w(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}_{\mathcal{B}_1})$.

Из включения $\widehat{w}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ получаем, что $w(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{E}$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что $w(t)$ удовлетворяет определению 2, и, таким образом, является единственным сильным решением задачи (9). □

Следствием теоремы 1 является утверждение о сильной разрешимости задачи Коши (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

$$1. \quad K(t,s), \ \frac{\partial}{\partial t}K(t,s) \in C(0 \leqslant s \leqslant t < \infty; \mathcal{L}(E)),$$
$$2. \quad f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E),$$

тогда для любых $u^0 \in \mathcal{D}(B^2)$, $u^1 \in \mathcal{D}(B)$ *существует и единственно сильное решение задачи Коши* (1).

Доказательство. Докажем, прежде всего, что

$$z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 u^0 + (I+C)^{-1}u^1 \\ B_0 u^0 - (I+C)^{-1}u^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0) = \mathcal{D}(B_0) \oplus \mathcal{D}(B_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2) = \mathcal{D}(B^2), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(B). \tag{13}$$

Пусть $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$. Из того, что $\mathcal{D}(B_0)$ — линеал, очевидно, следует, что $B_0 u^0 \in \mathcal{D}(B_0)$, $(I+C)^{-1}u^1 =: \Psi \in \mathcal{D}(B_0)$. Из первого включения получаем $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2)$, а из второго следует, что $u^1 = \Psi + B_0^{-1}(B_0 C\Psi) \in \mathcal{D}(B_0)$, поскольку оператор $B_0 C$ ограничен.

Обратно, пусть $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2)$, $u^1 \in \mathcal{D}(B_0)$. Для элемента Ψ, определенного как и выше, получаем $\Psi = u^1 - B_0^{-1}(B_0 C\Psi) \in \mathcal{D}(B_0)$, в силу ограниченности оператора $B_0 C$. Тогда $(I+C)^{-1}u^1 \in \mathcal{D}(B_0)$ и вместе с условием $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2)$ это влечет включение $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$.

Из проведенных рассуждений следует, что при условиях настоящей теоремы выполнены все условия теоремы 1 и, таким образом, задача Коши (8) (или, что то же, задача (6)-(7)) имеет единственное сильное решение $z(t) = (x(t); y(t))^t \in$

$C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(B_0) \oplus \mathcal{D}(B_0)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$. Осуществляя в системе (6) обратную замену $\xi = 1/2(x+y)$, $\eta = 1/2(x-y)$ получим, что система (3) имеет единственное сильное решение $(\xi(t); \eta(t))^t \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(B_0) \oplus \mathcal{D}(B_0)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$. Возвращаясь в системе (3) к замене $\xi(t) = B_0 u(t)$ получим, что функция $u(t)$ является единственным сильным решением задачи Коши (1). □

Выводы

В работе доказана теорема о сильной разрешимости задачи Коши для некоторого интегродифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве.

Список литературы

[1] Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids.* – Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003. – 444 P. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)

[2] Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. – Симферополь, 1994. – С. 41–42.

[3] Закора Д. А. *Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы. – 2006. – Вып. 20. – С. 104–112.

[4] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – Москва: Наука, 1967. – 464 С.