Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 21–30.

Е. В. Комиссаренко

О ПОЛНОТЕ И НЕВЫРОЖДЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕНИЙ

Получены условия полноты бесконечной группы отражений, действующей на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности в линейном вещественном n-мерном пространстве и имеющей четыре линейные оболочки орбит направлений симметрии, любые три из которых образуют прямую сумму. Найдены также условия невырожденности алгебры ее инвариантов.

1^o. Изучение алгебраических нецилиндрических гиперповерхностей с бесконечным множеством плоскостей симметрии сводится к вычислению базисных инвариантов групп типа G^s_μ [1,2]. Пусть группа G такого типа действует в линейном вещественном n-мерном пространстве V и имеет четыре линейные оболочки орбит направлений симметрии $A_1, \dots, A_4$, и при этом любые три из четырех плоскостей $A_1, \dots, A_4$ образуют прямую сумму. Группе G в соответствующем базисе пространства V сопоставляется матрица Δ, образованная линейными формами, определяющими отражения, порождающие группу G [2].

Ранее получена классификация таких матриц [3] и для каждого класса матриц найдены рациональные инварианты соответствующей группы [4], а при некоторых дополнительных условиях вычислены образующие алгебр полиномиальных инвариантов.

Цель работы —- получить условия полноты группы G, а также невырожденности алгебры ее инвариантов.

Основные результаты работы: Получены условия полноты группы G, а также невырожденности алгебры ее инвариантов для случая $\mathrm{rank}(\Delta) \leq 2$.

2^o. Пусть V — линейное вещественное n-мерное пространство, G – группа отражений пространства V, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) G действует на нецилиндрической алгебраической поверхности и порождена объединением четырех квадратичных множеств отражений $M_1, \dots, M_4$. Это означает, что каждое M_i определяется плоскостью A_i и соответствующим линейным

инъективным симметричным отображением $\mu_i : A_i \to V^*$, удовлетворяющим следующему условию: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а $P = \ker \mu_i(d)$.

2) Множества $M_1, \ldots, M_4$ поэлементно коммутируют между собой.

3) Любые три из четырех плоскостей A_i образуют прямую сумму.

Пусть $B_i = \{v \in A_i : \mu_i(v)|_{A_i} = 0\}$ – особая плоскость множества M_i.

Положим $s = \dim(B_4 \cap (B_1 + B_2 + B_3))$.

Далее будем считать, что каждая из четырех особых плоскостей лежит в сумме трех остальных особых плоскостей. В этом случае, который является основным при изучении строения группы G, в пространстве V существует базис

$$(a_{il},\ b_{ij},\ c_k\ :\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le l \le p_i;\ 1 \le j \le s;\ 1 \le k \le m)$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_{il} = a_{il}^*, \quad y_{ij} = b_{ij}^*, \quad z_k = c_k^*,$$

для которого

$$B_i = \langle b_{ij} : j \ge 1 \rangle \quad (i \le 3), \quad B_4 = \langle b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} : j \ge 1 \rangle,$$
$$A_i = \langle a_{il} \rangle \oplus B_i \quad (i \le 4),$$
$$\mu_i(a_{il}) = \varepsilon_{il}\, x_{il},\ \text{где}\ \varepsilon_{il} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (i;\, j \ge 1),$$
$$\mu_i(B_i) \subseteq \langle z_k : k \ge 1 \rangle \quad (i \le 4)$$

(см. [5]). Обозначим

$$\xi_{ij} = \mu_i(b_{ij}) \quad (1 \le i \le 3;\, j \ge 1), \quad \xi_{4j} = -\mu_4\,(b_{1j} + b_{2j} + b_{3j}) \quad (j \ge 1),$$
$$h_i = \sum_l \varepsilon_{il}\, x_{il}^2 + 2 \sum_j y_{ij}\, \xi_{ij} \quad (i \le 3), \quad h_4 = \sum_l \varepsilon_{4l}\, x_{4l}^2,$$
$$\Delta = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{41} & \ldots & \xi_{4s} \end{bmatrix},$$

I_i – i-тая строка матрицы Δ.

Если группа G действует на нецилиндрической поверхности, то, как показано в работе [4], ранг матрицы Δ не может быть больше трех. В этой же работе найдены инварианты группы G.

Рассмотрим вопрос о полноте группы G и невырожденности алгебры ее инвариантов. При этом невырожденность алгебры инвариантов группы означает, что группа действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, а полнота группы означает, что имеются алгебраические гиперповерхности, инвариантные относительно этой группы и обладающие следующим свойством: каждое отражение, сохраняющее все эти поверхности, принадлежит группе.

Пусть

$$d = \sum_{i,l} \alpha_{il}\, a_{il} + \sum_{i,j} \beta_{ij}\, b_{ij} + \sum_{k} \gamma_k\, z_k,$$

θ – линейная форма на V, для которой

$$P = \ker\theta, \quad \theta(d) \neq 0.$$

Если $(P,\, d)$ сохраняет все инварианты группы G, то из инвариантности z_k относительно $(P,\, d)$ следует, что $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$. *Тогда группа* G *полна.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$, то либо $s = 1$, либо найдутся вещественные ненулевые λ_i, для которых $\xi_{ij} = \lambda_i\, \xi_{4j} \quad (i \leq 3;\ j \geq 1)$.

1) $s = 1$.

В [4] показано, что формы

$$z_1, \ldots,\, z_m,\ h_i\, \xi_{41} - h_4\, \xi_{i1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

являются полиномиальными инвариантами группы G.

Обозначим $\Psi_i = (h_i\, \xi_{41} - h_4\, \xi_{i1})'_d$. Тогда

$$\Psi_i = \xi_{41}\left(\sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}\right) - \xi_{i1} \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Предположим, что $\Psi_i = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Так как $\xi_{41}\big(\sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}\big)$ и ξ_{i1} от ξ_{41} не зависят, то $\sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}$ и $\sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l}$ равны нулю, откуда $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4;\ l \geq 1)$, $\beta_{i1} = 0$ $(i \leq 3)$, то есть $d = 0$. Значит, группа имеет невырожденную алгебру инвариантов.

Докажем, что группа полна.

Пусть $(P,\, d)$ сохраняет инварианты группы G. Тогда $d \neq 0$ и по доказанному выше $\Psi_i \neq 0$ для некоторого $i \leq 3$.

1.1) Пусть θ не зависит ни от одного x_{il} $(i \leq 4;\ l \geq 1)$. Из делимости форм Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 на θ и из того, что хотя бы одна из этих форма ненулевая, следует, что $\theta \in \langle z_1, \ldots,\, z_m \rangle$, а это противоречит условию $\theta(d) \neq 0$.

1.2) Предположим, что θ зависит от некоторого x_{il} $(i \leq 4;\ l \geq 1)$. Меняя нумерацию множеств $M_1, \ldots,\, M_4$ и базисных векторов a_{il}, не нарушая общности, можно считать, что θ зависит от x_{11}. Но Ψ_2, Ψ_3 от x_{11} не зависят и делятся на θ, значит $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_{il} = 0$ $(i = 2, 3, 4;\ l \geq 1)$, $\beta_{i1} = 0$ $(i = 2, 3)$, то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\, a_{1l} + \beta_{11}\, b_{11}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \beta_{11}\, \xi_{11}.$$

Следовательно, $(P,\, d) \in\, M_1$.

2) $\xi_{ij} = \lambda_i\, \xi_{4j},\ \lambda_i \neq 0\ (i \le 3;\ j \ge 1)$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_i = 1\ (i \le 3)$.

В [4] показано, что тогда образующими алгебры полиномиальных инвариантов группы G являются формы

$$z_1, \ldots,\, z_m,\ h_i - h_4 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положим $\Psi_i = (h_i - h_4)'_d$. Пусть $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Тогда из равенств

$$(h_i - h_4)'_d = \sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} - \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j \beta_{ij}\, \xi_{4j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и учитывая $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$, получаем, что

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \le 3;\ l \ge 1;\ j \ge 1),$$

то есть $d = 0$. Следовательно, алгебра полиномиальных инвариантов группы G невырождена.

Докажем, что группа полна. Пусть $(P,\, d)$ сохраняет инварианты группы G. При этом можно считать, что $\Psi_i \neq 0$ для некоторого $i \le 3$.

2.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4,\ l \ge 1)$. Тогда каждая $\Psi_i = \sum_j \beta_{ij}\, \xi_{4j}$ делится на θ, при этом хотя бы одна из них не равна нулю. Значит θ не зависит от x_{il} и y_{ij}. Следовательно, $\theta(d) = 0$, что противоречит условию.

2.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \neq 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. Можно считать, что $\alpha_{11} \neq 0$. Тогда из инвариантности h_1 относительно $(P,\, d)$ следует, что $\Psi_1 = \theta\, \Phi$, где Φ – некоторая линейная форма. θ не зависит от y_{ij}, так как Ψ_1 не зависит от y_{ij}. Если Φ зависит от некоторого x_{ij}, то θ не зависит ни от одного x_{ij}. Но тогда $\theta(d) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, Φ не зависит ни от одного x_{ij}, а тогда θ зависит от x_{11}. Но Ψ_2 и Ψ_3 также делятся на θ и от x_{11} не зависят, значит $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$. Так как формы x_{il} $(i \le 4;\ l \ge 1)$ и ξ_{4j} $(j \ge 1)$ линейно независимы, то $\alpha_{il} = 0$ $(i = 2, 3, 4;\ l \ge 1)$, $\beta_{ij} = 0$ $(i = 2, 3;\ j \ge 1)$, то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\, a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, b_{1j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, \xi_{4j}.$$

Значит, $(P,\, d) \in\, M_1$.

Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathrm{rank}(\Delta) = 2$. Тогда либо $s = 2$, либо, с точностью до изменения нумерации множеств $M_1, \ldots,\, M_4$ и умножения отображений $\mu_1, \ldots,\, \mu_4$ на ненулевые константы, можно считать, что матрица Δ совпадает с одной из матриц

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} I_3 + I_4 \\ kI_3 + I_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{21} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{31} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{41} & \xi_2 & \dots & \xi_s \end{bmatrix}$$

и при этом $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а у матриц $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ третья и четвертая строки линейно независимы (для Δ_4 это означает, что $\xi_{31} \neq \xi_{41}$), см.[3].

Обозначим $\Lambda_i = \mu_i(B_i)$.

Теорема 2. 1. *Если $\Delta = \Delta_1$ или $\Delta = \Delta_2$, то алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.*

2. *Если $\Delta = \Delta_3$ и $\dim(\Lambda_3 + \Lambda_4) = 2s$, то алгебра полиномиальных инвариантов невырождена. При этом если $k \neq 1$, то группа G полна, а если $k = 1$, то множество $\widetilde{M}$ всех отражений, сохраняющих инварианты группы G, представимо в виде объединения $M_1 \cup M_2 \cup M_0$, где M_0 – квадратичное множество отражений, определяемое плоскостью $A_3 + A_4$ и отображением μ_0, для которого $\mu_0|_{A_3} = -\mu_3,\ \mu_0|_{A_4} = -\mu_4$.*

3. *Если $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) = s + 3$, то группа G полна.*

Доказательство. 1) Если $\Delta = \Delta_1$, то образующими алгебры полиномиальных инвариантов, как показано в [4], являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3,\ h_2 - h_3.$$

Так как эти формы не зависят от x_{4l} $(l \geq 1)$, то и любой полиномиальный или рациональный инвариант группы G не зависит от x_{4l}, значит, алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

Если $\Delta = \Delta_2$, то образующими алгебры полиномиальных инвариантов являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3,\ h_2 - h_4$$

(см. [4]). Положим $\Psi_1 = (h_1 - h_3)'_d$, $\Psi_2 = (h_2 - h_2)'_d$. Тогда

$$\Psi_1 = \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{3l}\, \alpha_{3l}\, x_{3l} + \sum_j (\beta_{1j} - \beta_{3j})\xi_{3j},$$

$$\Psi_2 = \sum_l \varepsilon_{2l}\, \alpha_{2l}\, x_{2l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j \beta_{2j}\, \xi_{4j}.$$

Очевидно, что если, например, $d = b_{11} + b_{31}$, то $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, $(z_k)'_d = 0$.

2) Если $\Delta = \Delta_3$ и $\dim(\Lambda_3 + \Lambda_4) = 2s$, то, как показано в [4], образующими алгебры полиномиальных инвариантов группы G являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3 - h_4,\ h_2 - k\, h_3 - h_4.$$

Положим

$$\Psi_1 = (h_1 - h_3 - h_4)'_d = \\ \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \sum_j (\beta_{1j} - \beta_{3j})\,\xi_{3j} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{4j},$$

$$\Psi_2 = (h_2 - k\,h_3 - h_4)'_d = \\ \sum_l \varepsilon_{2l}\,\alpha_{2l}\,x_{2l} - k\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + k\sum_j (\beta_{2j} - \beta_{3j})\,\xi_{3j} + \sum_j \beta_{2j}\,\xi_{4j}.$$

Проверим невырожденность алгебры полиномиальных инвариантов группы G.

Пусть $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Тогда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 4;\, l \ge 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; j \ge 1),$$

то есть $d = 0$.

Рассмотрим вопрос о полноте группы. Пусть $(P,\, d)$ сохраняет все инварианты группы G, тогда Ψ_1 и Ψ_2 делятся на θ и $\Psi_i \ne 0$ для некоторого $i \le 2$.

Пусть $k = 1$.

2.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\, l \ge 1)$. Тогда из делимости форм Ψ_1, Ψ_2 на θ и того, что хотя бы одна форма $\Psi_i \ne 0 \quad (i = 1, 2)$ и не зависит от x_{il} и y_{ij} следует, что $\theta(d) = 0$, а это противоречит условию.

2.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \ne 0$ $(i \le 4;\, l \ge 1)$. Не нарушая общности, за счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2, M_3 и M_4, а также нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

2.2.1) $\alpha_{11} \ne 0$.

Тогда $\Psi_1 \ne 0$ и можно считать, что $\theta = \Psi_1$. Значит $\Psi_2 = 0$, так как не зависит от x_{11} и делится на θ, откуда

$$\alpha_{il} = \beta_{ij} = 0 \quad (i \ge 2;\, l \ge 1;\, j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\,a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,b_{1j}, \quad \theta = \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{1j},$$

следовательно, $(P,\, d) \in\, M_1$.

2.2.2) $\alpha_{31} \ne 0$.

Тогда можно считать, что $\theta = \Psi_1$, а $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 2,\, l \ge 1), \quad \beta_{1j} = \beta_{2j} = -t_j \quad (j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\,a_{3l} + \sum_l \alpha_{4l}\,a_{4l} + \sum_j (\beta_{3j} - \beta_{1j})\,b_{3j} + \sum_j\, t_j\,b_{4j},$$

$$\theta = -\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} - \sum_j (-\beta_{1j} + \beta_{3j})\,\xi_{3j} - \sum_j\, t_j\,\xi_{4j}.$$

Значит, $(P,\, d)$ принадлежит множеству M_0, определяемому плоскостью $A_3 + A_4$ и отображением μ_0, которое определяется равенствами $\mu_0|_{A_3} = -\mu_3,\ \mu_0|_{A_4} = -\mu_4$.

Пусть $k \neq 1$.

2.3) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. Тогда из того, что хотя бы одна из форм $\Psi_1,\, \Psi_2$ не равна нулю и делится на θ, при этом $\Psi_1,\, \Psi_2$ не зависят от x_{il} и y_{ij}, следует, что $\theta(d) = 0$, что противоречит условию.

2.4) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \neq 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. За счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2 и нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

2.4.1) $\alpha_{11} \neq 0$.

Тогда, как и в случае 2.2.1) $\theta = \Psi_1$. Значит $\Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \ge 2;\, l \ge 1;\, j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\, a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, b_{1j}, \quad \theta = \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, \xi_{1j}.$$

Следовательно, $(P,\, d) \in\, M_1$.

2.4.2) $\alpha_{31} \neq 0$.

Тогда опять можно считать, что $\theta = \Psi_1$, а $k\, \Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 4;\, l \ge 1;\, j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\, a_{3l} + \sum_j \beta_{3j}\, b_{3j}, \quad \theta = -\sum_l \varepsilon_{3l}\, \alpha_{3l}\, x_{3l} - \sum_j \beta_{3j}\, \xi_{3j}.$$

Следовательно $(P,\, d) \in\, M_3$.

2.4.3) $\alpha_{41} \neq 0$.

Тогда $\theta = \Psi_1$, а $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 3;\, l \ge 1), \quad \beta_{1j} = \beta_{2j} = \beta_{3j} = -t_j \quad (j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{4l}\, a_{4l} + \sum_j\, t_j\, b_{4j}, \quad \theta = -\sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} - \sum_j\, t_j\, \xi_{4j}.$$

Следовательно $(P,\, d) \in\, M_4$.

3) Пусть $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) = s + 3$.

Положим $H_i = f_3(h_i - h_4) - f_i(h_3 - h_4)$ $(i \le 2)$. H_1, H_2 – полиномиальные инварианты группы G и поэтому для доказательства невырожденности алгебры полиномиальных инвариантов достаточно проверить, что из

$$\Psi_1 = (H_1)'_d = 0 \quad \Psi_2 = (H_2)'_d = 0 \quad (z_k)'_d = 0$$

следует, что $d = 0$. При этом

$$\Psi_1 = f_3\Big(\sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{11}(\xi_{41}+f_1) + \sum_{j\geq 2}\beta_{1j}\,\xi_j\Big) - \\ - f_1\Big(\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\geq 2}\beta_{3j}\,\xi_j\Big),$$

$$\Psi_2 = f_3\Big(\sum_l \varepsilon_{2l}\,\alpha_{2l}\,x_{2l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{21}(\xi_{41}+f_2) + \sum_{j\geq 2}\beta_{2j}\,\xi_j\Big) - \\ - f_2\Big(\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\geq 2}\beta_{3j}\,\xi_j\Big).$$

Если $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ и $(z_k)'_d = 0$, то

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \leq 4;\, l \geq 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1,2,3; j \geq 1),$$

то есть $d = 0$.

Докажем, что группа G полна.

3.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4;\, l \geq 1)$. Тогда из того, что хотя бы одна из форм Ψ_1, Ψ_2 не равна нулю и делится на θ следует, что $\theta \subseteq \langle z_k : k \geq 1\rangle$, что противоречит условию.

3.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \neq 0$ $(i \leq 4;\, l \geq 1)$. За счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2 и нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

3.2.1) $\alpha_{11} \neq 0$.

Тогда θ зависит от x_{11}, а так как Ψ_2 не зависит от x_{11}, то $\Psi_2 = 0$, откуда следует, что

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \geq 2;\, l \geq 1;\, j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\,a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,b_{1j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{1j}.$$

Значит, $(P,\, d) \in M_1$.

3.2.2) $\alpha_{31} \neq 0$.

Тогда θ зависит от x_{31}, а $f_2\,\Psi_1 - f_1\,\Psi_2 = 0$, откуда следует

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i = 1,2,4;\, l \geq 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1,2;\, j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\,a_{3l} + \sum_j \beta_{3j}\,b_{3j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\geq 2}\beta_{3j}\,\xi_j.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_3$.

3.2.3) $\alpha_{41} \neq 0$.

Тогда θ зависит от x_{41}, а $(f_2 - f_3)\Psi_1 - (f_1 - f_3)\Psi_2 = 0$, откуда следует, что

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 3;\, l \ge 1), \quad \beta_{ij} = -t_j \quad (i \le 3;\, j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{4l}\, a_{4l} + \sum_j t_j\, b_{4j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j t_j\, \xi_j.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_4$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Если $\Delta = \Delta_3$, $k \ne 1$ и $\dim(\Lambda_3 + \Lambda_4) < 2\, s$, то алгебра полиномиальных инвариантов может быть как вырожденной, так и невырожденной.

Приведем соответствующие примеры.

Пусть $s = 4$.

Если $\xi_{31} = \xi_{41}$ и $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\, l \ge 1)$, $\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0$ $(j = 2, 3, 4)$, $\beta_{11} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k})$, $\beta_{21} = 1$, $\beta_{31} = 1 + \frac{1}{k}$, то $\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0,\ (z_k)'_d = 0$, то есть алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

С другой стороны, если $\xi_{31} = \xi_{42}$ и формы $\xi_{32}, \xi_{33}, \xi_{34}, \xi_{41}, \xi_{42}, \xi_{43}, \xi_{44}$ линейно независимы, то из предположения $\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0,\ (z_k)'_d = 0$ следует, что $d = 0$.

Замечание 5. Если $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) < s + 3$, то алгебра полиномиальных инвариантов может быть вырожденной.

Покажем это.

Пусть $s = 4$, $f_1 = -\xi_{41} + \xi_2$, $f_2 = -\xi_{41} + \xi_3$, $f_3 = \xi_{41} + \xi_4$ и $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\, l \ge 1)$, $\beta_{31} = \beta_{34} = 0$, $\beta_{23} = u$, $\beta_{21} = -u$, $\beta_{12} = v$, $\beta_{11} = -v$. Тогда при любых значениях u, v формы $\Psi_1,\ \Psi_2$ равны нулю и $(z_k)'_d = 0$. Это значит, что алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

Заключение. *Пусть G — группа отражений типа G^s_μ с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии, любые три из которых образуют прямую сумму. Получены условия полноты группы G, а также невырожденности алгебры ее инвариантов для случая* $\mathrm{rank}(\Delta) \le 2$. *Случай* $\mathrm{rank}(\Delta) = 3$ *будет рассмотрен позже.*

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. *О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии: Москва. — 1989, — Том 21. — С. 155 — 208.

[2] Криворучко А.И. *О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями* // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — № 1. — С. 78 — 92.

[3] Криворучко А.И. *О вырожденных матрицах, образованных линейными формами* // Таврический вестник информатики и математики. – 2005. — № 2. — С. 25 — 44.

[4] Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И. *Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии* // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2005. — Том 1, № 1. — С. 10 — 18.

[5] Криворучко А.И. *О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями* // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2001. — Том 14, № 1. — С. 60 — 65.

[6] Криворучко А.И. *О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. — 1999. — Вып. 18. — С. 170 — 177.

[7] Криворучко А.И. *О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16. С. 124 — 129.

Знайдені умови повноти нескінченной групи віддзеркалень, що діє на нециліндричній алгебраїчній гіперповерхні в лінійному дійсному n-вимірному просторі і яка має чотири лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій, будь яки три з котрих утворюють пряму сумую. Знайдені також умови невиродженості алгебри її інваріантів.

The conditions of completeness of infinite reflection group acting on a non-cylindrical algebraic hypersurface in linear real n-dimensional space and having four linear spans of orbits of directions of symmetries, anyone three of which form the direct sum are found. The conditions of non-degeneracy of its invariant algebra are found too.