Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 31–44.

УДК 517.972

Е. В. Божонок, Е. М. Кузьменко

КЛАССЫ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ИМЕЮЩИХ НЕЛОКАЛЬНЫЙ КОМПАКТНЫЙ ЭКСТРЕМУМ В $W^{1,p}$ НАД МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТЬЮ

В данной статье разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный компактный экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, K–экстремум.

Введение. Предварительные сведения

Начиная с работы Л. Тонелли [1], вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков. В большинстве случаев (см., например, [2]–[5]) исследование экстремальных вариационных задач в пространствах Соболева было связано с так называемыми прямыми методами вариационного исчисления.

Недавно был разработан новый метод исследования вариационного функционала в пространстве Соболева в одномерном случае (см. наши работы [6]–[8]). Он основан на исследовании так называемых *компактно-аналитических* (или, K–*аналитических*) свойств и *компактных экстремумов* (K–*экстремумов*) вариационных функционалов. Впоследствии этот метод был перенесен на многомерный случай ([9]–[12]).

В настоящей работе на основе полученных ранее как необходимых так и достаточных условий компактного экстремума разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod_{i=1}^{N}[0;T]$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

1. K–аналитические свойства и условия K–экстремума вариационного функционала в $W^{1,p}$

В данном пункте в обзорном порядке приведем некоторые вспомогательные определения и результаты (см. [8], [11], [12]), необходимые для дальнейшего исследования вариационного функционала на нелокальный компактный экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Пусть E — произвольное вещественное локально выпуклое пространство, $\mathfrak{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E. Для каждого $C \in \mathfrak{C}(E)$ обозначим через E_C линейную оболочку C, снабженную банаховой нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Определение 1. Функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ называется *K–непрерывным* (*K–дифференцируемым, дважды K–дифференцируемым* и т.д.) в точке $y \in E$, если все сужения Φ на $(y + E_C)$ непрерывны (дифференцируемы по Фреше, дважды дифференцируемы по Фреше и т.д.) в y относительно нормы $\|\cdot\|_C$. Аналогично скажем, что Φ имеет *компактный экстремум* (*K–экстремум*) в y, если все сужения $\Phi\big|_{y+E_C}$ имеют локальный экстремум в y относительно соответствующих норм.

В наших работах [9]–[10], на базе понятия доминантной смешанной гладкости, были введены широкие классы допустимых интегрантов, названных вейерштрассовскими *K–псевдополиномами*, для которых вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx \tag{1}$$

в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, обладает соответствующими K–аналитическими свойствами.

Определение 2. Пусть $f \in C^m \cap K_p(z)$. Отображение f называется *вейерштрассовским K–псевдополиномом класса* $W^m K_p(z)$, если оно может быть представлено в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k\,, \tag{2}$$

где коэффициенты R_k $(k = \overline{0, p})$, принимающие значения в пространстве k–линейных форм на $\mathbb{R}^n$, являются борелевскими отображениями и все джеты порядка m

$(R_k\,, \nabla_{yz} R_k, \ldots, \nabla_{yz}^m R_k)$ коэффициентов R_k удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной непрерывности (см. [13]).

Условие $f \in W^m K_p(z)$ обеспечивает m–кратную K–дифференцируемость функционала (1).

Теорема 1. *Если интегрант f вариационного функционала (1) принадлежит классу $W^m K_p(z)$, $m \in \mathbb{N}$, то функционал (1) m раз K–дифференцируем в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом классическая формула вариации m–го порядка сохраняется и для K–вариации m–го порядка, т.е.*

$$\Phi_K^{(m)}(y)(h)^m = \int\limits_D \left[\sum_{l=0}^{m} C_m^l \frac{\partial^m f}{\partial y^{m-l} \partial z^l}(x, y, \nabla y) h^{m-l} \cdot (\nabla h)^l \right] dx\,. \tag{3}$$

Для нахождения K–экстремума вариационного функционала был выведен аналог классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского (см. [11]).

Здесь мы рассматриваем вариационный функционал (1) с дополнительным граничным условием

$$y\big|_{\partial D} = y_0, \tag{4}$$

где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей ∂D.

Теорема 2. *Пусть $f \in W^1 K_p(z)$. Предположим, что функционал (1) при граничном условии (4) достигает K-экстремума в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и отображение $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$. Тогда п.в. на D имеет место обобщенное уравнение Эйлера-Остроградского*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y) \right) = 0\,. \tag{5}$$

В частности, условие теоремы выполнено, если

$$\frac{\partial f}{\partial z} \in C^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n) \quad \text{и} \quad y(\cdot) \in W^{2,p}(D)\,.$$

Решения обобщенного уравнения Эйлера-Остроградского (5) названы *K–экстремалями* вариационного функционала (1).

Далее, в работе [12] получено достаточное условие K–экстремума вариационного функционала (1) в $W^{1,p}(D)$ в терминах гессиана подынтегральной функции.

Теорема 3. *Пусть $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала (1) в $W^{1,p}(D)$ $(p \geq 2)$ при граничном условии (4). Предположим, что*
(i) интегрант f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_p(z)$;
(ii) $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in D$ выполнены условия
1)$\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) > 0$;

2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) \gg 0$;

3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y)\right)^{-1} \cdot$
$\cdot\, (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) > 0$;

4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \cdot$
$\cdot\, (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \gg 0$,

то вариационный функционал (1) *имеет строгий K–минимум в точке* $y(\cdot)$.

2. Классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в $W^{1,p}$

Теперь перейдем к рассмотрению классов вариационных функционалов в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, которые будут иметь нелокальный компактный экстремум в нуле.

Нами разработана следующая схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум. Сначала мы проверяем тот факт, что $y_0(\cdot) \equiv 0$ является K–экстремалью соответствующего функционала, т.е. удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского (5). Далее на K–экстремали $y_0(\cdot) \equiv 0$ мы проверяем достаточное условие компактного минимума в терминах гессиана подынтегральной функции (теорема 3). На последнем этапе мы проводим исследование найденного K–минимума $y_0(\cdot) \equiv 0$ на нелокальность.

Обобщая пример, рассмотренный Орловым И.В. и Божонок Е.В. (см. [8], пример 5.1.4) на случай пространства Соболева над многомерной областью рассмотрим т.н. "соболевскую квазинорму"

Пример 1.

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{6}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{7}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = y^2 + \varphi(z) \cdot \|z\|^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + 2\varphi(z) \cdot z_i; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i^2} \cdot \|z\|^2 + 4\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_i + 2\varphi(z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j} \cdot \|z\|^2 + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_j + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \cdot z_i \quad (i = \overline{1,N}, \;\; i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (5) для функционала (6)

$$2y - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + \varphi(z) \cdot 2z_i\right] \overset{п.в.}{=} 0. \tag{8}$$

Таким образом, при граничном условии (7) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (8), то есть является K–экстремалью функционала (6); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2 > 0;$

2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0$;

3) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= 2 > 0;$

4) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z) \cdot (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= \begin{pmatrix} 4\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]$ при дополнительном требовании $\varphi(0) > 0$. Имеем, что функционал (6)–(7) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0) > 0$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (6)–(7) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]$ с учетом введенного требования $\varphi(0) > 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{9}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \le \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 + \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \right] dx_1 \dots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^N (z_i^0)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N \le$$

$$\le -r_0 \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (6)–(7) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^N [0; T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4. *Рассмотрим вариационный функционал ("соболевскую квазинорму")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 \right] dx, \ \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ \ D = \prod_{i=1}^N [0; T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, при дополнительном граничном условии $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:* $\varphi(z_0) \le -r_0 < 0$ *для некоторого* $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером соболевской квазинормы может быть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,\ y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]\,.$$

Здесь функция $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$ в силу периодичности и гладкости, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Теперь можно обобщить пример 1, введя зависимость φ от y.

Пример 2. Рассмотрим

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{10}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{11}$$

Отметим, что в данном и в последующих примерах схема исследования на нелокальный компактный экстремум в нуле повторяет схему примера 1. В этой связи, мы будем формулировать окончательные условия на интегрант в каждом из отдельно взятых случаев.

Теорема 5. *Рассмотрим вариационный функционал* (10)*, где* $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$*, при дополнительном граничном условии* (11)*.*

Тогда, в предположении $\varphi(0, 0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(0, z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

В качестве конкретного примера можно рассмотреть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(y + div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,\ y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]\,.$$

В данном случае функция $\varphi(z) = \cos(y + z_1 + \ldots + z_N)$; очевидно, что $\varphi \in W_K^2(z)$. Кроме того, выполнены условия теоремы 5, а именно $\varphi(0, 0) = \cos(0 + 0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(0, z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Таким образом, функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

Дальнейшие классы примеров, как и оговаривали, будем оформлять в виде теорем. Обобщим последний пример и рассмотрим

Теорема 6. *Имеем вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] \cdot \psi(x) dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{12}$$

где $\varphi(y, z) \in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot)$ — некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{13}$$

Тогда, в предположении $\varphi(0,0) > 0$ и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(0, z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле.

В качестве весовой функции можно взять $\psi(x) = \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$, и одновременно не равны нулю. В этом случае, при условии выполнения остальных требований теоремы 6, функционал вида

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] \cdot \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N} dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]\,,$$

достигает строго нелокального K–минимума в нуле.

Теорема 7. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(y^2 + \|\nabla y\|^2\right) dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{14}$$

где $\varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z)$, $\varphi(0) = 0$, при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{15}$$

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(u_0^2) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле.

Отметим, что условия на функцию φ

$$\varphi \in C^2([0;+\infty]),\ \varphi(t+h)-\varphi(t)=O(h) \text{ для } |h|\to\infty$$

являются достаточными для принадлежности $\varphi(y^2+\|z\|^2)$ к классу $W^2_K(z)$. В качестве конкретного примера такой функции можно рассмотреть

$$\varphi(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1-\delta;\\ 2-t, & 1+\delta\le t\le+\infty;\\ \varphi, & \text{сглажена на } [1-\delta;1+\delta]. \end{cases}$$

Данная функция удовлетворяет всем требованиям теоремы 7, а именно $\varphi(0)=0$, $(\partial\varphi/\partial t)(0)=1>0$ и для любого $u_0>\sqrt{2}\ \varphi(u_0)<0$.

Обобщим данный пример.

Теорема 8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_D \varphi\left(y^2+\|\nabla y\|^2\right)\cdot\psi(x)dx,\ \ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^N[0;T], \tag{16}$$

где $\varphi(y^2+\|z\|^2)\in W^2_K(z)$, $\varphi(0)=0$, $\psi(\cdot)$ *— некоторая непрерывная положительная весовая функция, при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{17}$$

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(u_0^2)\le -r_0<0$$

для некоторого $u_0\in\mathbb{R}$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Отметим, что в качестве весовой функции можно взять любую непрерывную положительную функцию, в частности, $\psi(x)=\exp^{\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_Nx_N}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,N}$, и одновременно не равны нулю.

Теорема 9. *Рассмотрим вариационный функционал (т.н. "квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y)=\int\limits_D \left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2+\psi(y)-y^2\right]dx,\ \ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^N[0;T], \tag{18}$$

где $\varphi(\cdot)\in W^2_K(z)$, $\psi(\cdot)\in C^2$, $\psi(0)=0$, *при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{19}$$

Тогда, в предположения $\varphi(0)>0$, $\psi'(0)=0$ *и* $\psi''(0)>2$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0)\le -r_0<0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером квазигармонического осцилятора может служить функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2\sin^2 y - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T].$$

Здесь $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi(y) = 2\sin^2 y$, $\psi(\cdot) \in C^2$, $\psi(0) = 0$. Проверим требования теоремы 9 на функции φ, ψ. Действительно, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\psi'(0) = 2\sin 2y|_{y=0} = 0$, $\psi''(0) = 4\cos 2y|_{y=0} = 4 > 2$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$. Таким образом, вариационный функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

В рассмотренных выше примерах никаких ограничений на меру области D не налагается. Сейчас рассмотрим пример вариационного функционала, для которого наличие K–экстремума возможно только при некотором ограничении на меру D. Для этого сформулируем следующую теорему для проверки достаточных условий K–минимума (см. [14]).

Теорема 10. *Пусть вариационный функционал* (1) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера-Остроградского* (5) *при граничном условии* $y|_{\partial D} = 0$, $f \in W^2K_p(z)$, $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Введем следующие обозначения:

$$r =: \min_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2\ (\forall z \in \mathbb{R}_z^n)\},\ \ R(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial z^2};$$

$$s =: \min_{x \in D} \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2};$$

$$q =: \min_{x \in D} Q(x),\ \ Q(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y \partial z_i}\right).$$

Тогда
1) при $r > 0$, $q > 0$, $\Phi(y)$ *достигает строгого* K*–минимума в нуле (без каких–либо ограничений на меру* D*).*
2) при $r > 0$, $q < 0$, $s > 0$ *и при ограничении на меру* D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}}\right)^N, \tag{20}$$

$\Phi(y)$ *достигает строгого* K*–минимума в нуле.*

Теорема 11. *Рассмотрим вариационный функционал ("обобщенный квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(x, y, \nabla y) - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{21}$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2 K_1(z)$, $\psi(x, 0, 0) = 0$, *при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{22}$$

Введем следующие обозначения

$$r = \min_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 \;(\forall z \in \mathbb{R}_z^N)\},$$

где

$$R(x) = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & 2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n^2} \end{pmatrix};$$

$$s = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y^2} - 2 \right);$$

$$q = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y \partial z} \right) \right).$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$, $r > 0$, $s > 0$ *и* $q < 0$, *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области* D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^N.$$

В вариационном функционале (21) в качестве функции ψ можно взять

$$\psi(x, y, z) = 2 \sin^2(y + z_1 + \ldots + z_N) + 3(x_1 + \ldots + x_N) \cdot y \cdot (z_1 + \ldots + z_N).$$

Тогда можно рассмотреть функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2 \sin^2(y + div_x y) + 3 \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y \cdot div_x y - y^2 \right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T].$$

Данный функционал будет удовлетворять всем требованиям теоремы 11. Действительно, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$. Для функции φ выполняется условие перемены знака $\varphi(0) = 1 > 0$, а для $z_0 = ((\pi/N), \dots, (\pi/N))$ $\varphi(z_0) = -1 < 0$. Осталось проверить неравенства $r > 0$, $s > 0$ и $q < 0$. В нашем случае

$$R(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 6 & \cdots & 4 \\ .. & .. & .. & .. \\ 4 & 4 & \cdots & 6 \end{pmatrix},$$

тогда имеем

$$r = \min_{x\in D}\max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2\|z\|^2(\forall z \in \mathbb{R}_2^N)\} = 2 > 0;$$

$$s = 2 > 0; \quad q = 2 - 3N < 0\ (\forall N).$$

Таким образом, $\Phi(y)$ имеет строгий нелокальный K–минимум в нуле при дополнительном ограничении на меру области D:

$$mes_N < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2}{|2-3N|}}\right)^N.$$

Отметим, что в случае размерности $N = 1$ получаем ограничение на длину отрезка $[0;T]$

$$T < \sqrt{2}\pi.$$

Обобщим предыдущий пример — введем весовую функцию.

Теорема 12. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(x,y,\nabla y) - y^2\right] \cdot \tau(x)dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T], \tag{23}$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$, $\tau(\cdot)$ *— некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{24}$$

Введем следующие обозначения

$$r = \min_{x\in D}\max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2\ (\forall z \in \mathbb{R}_z^N)\},$$

где

$$R(x) = \begin{pmatrix} \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2}\right) \cdot \tau(x) & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1} \cdot \tau(x) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n} \cdot \tau(x) & \cdots & \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2}\right) \cdot \tau(x) \end{pmatrix};$$

$$s = \min_{x\in D} \left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 \right) \cdot \tau(x) \right];$$

$$q = \min_{x\in D} \left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y \partial z} \right) \right) \cdot \tau(x) \right].$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$, $r > 0$, $s > 0$ и $q < 0$, и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^N.$$

Авторы выражают благодарность И.В.Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Tonelli L. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* — Bologna: Zanichelli, 1921–23. — 466 p.

[2] Dacorogna B. *Introduction to the calculus of variations.* — London: Imperial College Press, 2004. — 228 p.

[3] Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г. и др. *Оптимальное управление.* / под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[4] Giaquinta M., Hildebrandt S. *Calculus of Variations I.* — New York: Springer Verlag, 1996. — 474 p.

[5] Giusti E. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2003. — 403 p.

[6] Bozhonok E. V. *Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space H^1* // Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser. — 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.

[7] Orlov I. V. *Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals* // Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser. — 2009. — Vol. 190. — P. 397–417.

[8] Орлов И. В., Божонок Е. В. *Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: учебное пособие.* — Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

[9] Кузьменко Е. М. *Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}$ // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 1. — С. 76–89.

[10] Кузьменко Е. М. *Условия* K*-дифференцируемости и повторной* K*-дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}$ *функций многих переменных* // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 3. — С. 39–60.

[11] Орлов И. В., Божонок Е. В., Кузьменко Е. М. *Необходимые условия K-экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью* // Доповіді НАН України. — 2014. — № 4. — С. 19–24.

[12] Божонок Е. В., Кузьменко Е. М. *Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью* // Нелинейные граничные задачи. — 2012. — Т.21. — С. 9–26.

[13] Schmeisser H.-J., Triebel H. *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces.* — Chichester: Wiley, 1987. — 300 p.

[14] Орлов И. В., Цыганкова А. В. *Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах* // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. (в печати)

Класи варіаційних функціоналів, що мають нелокальний компактний екстремум у $W^{1,p}(D)$ над багатовимірною областю

У даній статті розроблена схема дослідження варіаційного функціонала на нелокальний компактний екстремум у нулі в просторі Соболєва $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, *над багатовимірною компактною областю* $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. *Наведено ряд класів варіаційних функціоналів, що мають нелокальних* K*–екстремум.*

Ключові слова: варіаційний функціонал, простори Соболєва, K–екстремум.

Classes of variational functionals having nonlocal K–extremum in $W^{1,p}(D)$ on multi-dimensional domain

In this paper the investigation scheme of nonlocal compact extremum at zero for variational functional in Sobolev space $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, *on multi-dimensional compact domain* $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, *is derived. Some examples of variational functionals having nonlocal* K*–extremum are considered.*

Keywords: variational functional, Sobolev spaces, K–extremum.