Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 23–34.

УДК УДК 517.98

А. С. Векслер, М. А. Муратов, Б. А. Рубштейн

СХОДИМОСТЬ С РЕГУЛЯТОРОМ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ пространство с конечной неатомической мерой μ, $\mu\mathbf{\Omega} = 1$. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к функции f с регулятором g и скоростью $\{r_n\}$, $r_n \to 0$, если $|f_n - f| \leq r_n g$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $A_{n,\theta} f = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k$, где θ — эргодическое сохраняющее меру преобразование пространства $(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Из индивидуальной эргодической теоремы следует, что для каждой $f \in \mathbf{L}_1$ последовательность $\{A_{n,\theta} f\}$ сходится к $\overline{f} = \int f d\mu$ с некоторым регулятором g из пространства измеримых функций.

Теорема. *Для каждого сохраняющего меру эргодического преобразования θ, любой скорости $r_n \to 0$ и всякой $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq const$, существует такая равноизмеримая с f функция $\widehat{f}$, что условие $|A_{n,\theta}\widehat{f} - \overline{f}| \leq r_n g$, $n = 1, 2, \ldots$ влечет $g \notin \mathbf{L}_1$.*

Ключевые слова: пространства с мерой, эргодические теоремы, сходимость с регулятором

1. Введение. Предварительные сведения

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ — пространство с конечной неатомической мерой μ, $\mu\mathbf{\Omega} = 1$. Пусть $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ — пространство всех μ-измеримых почти всюду конечных вещественных функций f на $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть θ — сохраняющее меру преобразование в $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и для $f \in \mathbf{L}_0$:

$$A_{n,\theta} f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k, \quad B_\theta f = \sup_n A_{n,\theta} f.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Бирхгофа (см. [2], [4], [13]) утверждает, что для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$ последовательность $\{A_{n,\theta}f\}_{n\geq 1}$ сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ к некоторой предельной функции $\overline{f} \in \mathbf{L}_1$ такой, что

$$\overline{f} \circ \theta = \overline{f}.$$

При этом, в случае, когда θ — эргодическое, то

$$\overline{f} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} f d\mu$$

почти всюду для $f \in \mathbf{L}_1$.

Доминантная эргодическая теорема (см. [2], [4], [13]) утверждает, что $B_\theta f \in \mathbf{L}_0$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$, и $B_\theta f \in \mathbf{L}_1$ для любой функции $f \in \mathbf{L}\log\mathbf{L}$ ([1], [8] - [10]). Более того, если преобразование θ — эргодическое, то $B_\theta f \in \mathbf{L}_1$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathbf{L}\log\mathbf{L}$ (см. [4]).

Пусть $\mathbf{E}$ — идеальная структура в $\mathbf{L}_0$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{E}$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ называется (o)-*сходящейся* к $f \in \mathbf{E}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$) в $\mathbf{E}$, если

$$|f_n - f| \leq g_n \downarrow 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

для некоторой последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{E}$ [3].

Если существуют $g \in \mathbf{L}_0$, $g \geq 0$ и убывающая к нулю последовательность чисел $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ такие, что

$$|f_n - f| \leq r_n g$$

почти всюду для всех $n \in \mathbf{N}$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к функции $\overline{f}$ *с регулятором* g *в* $\mathbf{L}_0$ ($f_n \xrightarrow{(r)} f$) и скоростью $\{r_n\}_{n=1}^\infty$. Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{E}$, $\overline{f} \in \mathbf{E}$ и регулятор g принадлежит $\mathbf{E}$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к функции $\overline{f}$ *с регулятором* g *в* $\mathbf{E}$ [3].

Очевидно, (o)-сходимость следует из сходимости с регулятором. Более того, $f_n \xrightarrow{(r)} f$ с регулятором в $\mathbf{L}_0$ в том и только в том случае, когда $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{L}_0$. Это, в свою очередь, равносильно сходимости почти всюду $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ в $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Если $\mathbf{E}$ — порядково полная идеальная подструктура в $\mathbf{L}_0$, то $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ в $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-ограничена в $\mathbf{E}$. В частности, для любого (банахова) перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$:

$$f_n \xrightarrow{(o)} f \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow{п.в.} f \text{ и } |f_n - f| \leq g \text{ для некоторого } g \in \mathbf{E}.$$

Пусть $f, g \in \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \mu)$. Функции f и g называются *равноизмеримыми* ([7]), если их функции распределения равны:

$$\mathbf{n}_f(t) = \mu\{x \in \mathbf{\Omega} \colon f(x) > t\} = \mu\{x \in \mathbf{\Omega} \colon g(x) > t\} = \mathbf{n}_g(t).$$

для любого $t \in \mathbf{R}$. Ясно, что если функции f и g равноизмеримы, $f, g \in \mathbf{L}_1$, то

$$\overline{f} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} f\,d\mu = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} g\,d\mu = \overline{g}$$

почти всюду.

В работах ([11],[12]) рассматривались условия (o)-сходимости и (o)-ограниченности чезаровских средних $\{A_{n,\tau} f\}$ в различных перестановочно инвариантных пространствах $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$.

Цель данной работы — изучить сходимость с регулятором в перестановочно инвариантных пространствах $\mathbf{E}$. В случае, когда $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$, мы доказываем следующую теорему:

Теорема 1. *Для каждого сохраняющего меру эргодического преобразования θ, любой скорости $r_n \to 0$ и всякой функции $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq const$, существует такая равноизмеримая с f функция $\widehat{f}$, что условие $|A_{n,\theta}\widehat{f} - \overline{f}| \leq r_n g$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ влечет $g \notin \mathbf{L}_1$.*

Поскольку мера μ предполагается конечной, и значит

$$\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$$

для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$, мы имеем аналогичный отрицательный результат и для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [1], [4], [5], [6], [7].

2. Основная лемма

Пусть θ — сохраняющее меру эргодическое преобразование в $\mathbf{\Omega}$ и $A \in \mathbf{\Sigma}$ измеримое подмножество в $\mathbf{\Omega}$. Обозначим:

$$r_\theta^A(x) = \min\{n \geq 1 \colon \theta^n x \in A\}, \quad x \in A;$$

$$A_n = \{x \in A \colon r_\theta^A(x) = n\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu A_n = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n\right) \leq \mu\mathbf{\Omega} < \infty.$$

Обозначим, далее, через A_{n_k}, $k = 0, 1, 2 \ldots$, подмножества в A, имеющие ненулевую меру, полагая:

$$A_{n_0} = A_1 = \{x \in A \colon \theta x \in A\},$$

$$A_{n_k} = \{x \in A \colon r_\theta^A(x) = n_k\},\ n_k > 1,\ k > 0.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой неограниченной последовательности положительных чисел* $\{\beta\}_{n=1}^{\infty}$ *и любой последовательности положительных чисел* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует такое измеримое подмножество* A *в* $\mathbf{\Omega}$, *что*

$$n_k\,\beta_{n_k}\,\mu A_{n_k} = u_k$$

при $k > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu\mathbf{\Omega} = 1$. Рассмотрим произвольные действительные числа $\varepsilon \in (0,1)$ и $N > 0$. Так как последовательность $\{\beta\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то существует такое натуральное число n, что

$$2\,N < \frac{\varepsilon\,n\,\beta_n}{2\,n+\varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{2\,n}{\varepsilon} + 1 < \frac{n\,\beta_n}{2\,N}.$$

Рассмотрим такое натуральное число M, что

$$\frac{2\,n}{\varepsilon} < M < \frac{n\,\beta_n}{2\,N}.$$

По лемме Халмоша - Рохлина [13] существует такое измеримое подмножество B в $\mathbf{\Omega}$, что множества $B, \theta B, \ldots, \theta^{M-1}B$ попарно не пересекаются и

$$0 < \mu\left(\mathbf{\Omega} \setminus \bigcup_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{M-1}} \theta^i B\right) < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\,M} < \mu B < \frac{1}{M}$$

и, следовательно,

$$2\,n\,\mu B < \frac{2\,n}{M} < \frac{2\,n}{2\,\varepsilon} = \varepsilon$$

и

$$n\,\beta_n \mu B > \frac{n\,\beta_n}{2\,M} > \frac{n\,\beta_n\,2\,N}{2\,n\,\beta_n} = N.$$

Кроме того

$$n+1 \le n+n = 2\,n < \frac{2\,n}{\varepsilon} < M.$$

Поэтому $M \ge n+2$. Таким образом, для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $N > 0$ существуют такие натуральное число n и измеримое подмножество B в $\mathbf{\Omega}$, что множества

$$B, \theta B, \ldots, \theta^n B, \theta^{n+1} B$$

попарно не пересекаются,

$$2\,n\,\mu B < \varepsilon$$

и

$$n\,\beta_n\,\mu B > N.$$

Перейдем к построению измеримого подмножества A, удовлетворяющего условиям леммы.

Пусть $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, $N_1 = 2\,u_1$, B_1 — такое измеримое подмножество в $\mathbf{\Omega}$ и n_1 — такое натуральное число, что множества

$$B_1, \theta B_1, \ldots, \theta^{n_1} B_1, \theta^{n_1+1} B_1$$

попарно не пересекаются,

$$2\,n_1\,\mu B_1 < \varepsilon_1 = \frac{1}{3}$$

и

$$n_1\,\beta_{n_1}\,\mu B_1 > N_1 = 2\,u_1.$$

Пусть, далее, $\varepsilon_2 = \frac{\mu B_1}{3}$, $N_2 = 2\,u_2$, B_2 — такое измеримое подмножество в $\mathbf{\Omega}$ и n_2 — такое натуральное число, что множества

$$B_2, \theta B_2, \ldots, \theta^{n_2} B_2, \theta^{n_2+1} B_2$$

попарно не пересекаются,

$$2\,n_2\,\mu B_2 < \varepsilon_2 = \frac{\mu B_1}{3}$$

и

$$n_2\,\beta_{n_2}\,\mu B_2 > N_2 = 2\,u_2.$$

продолжая процесс, при построенном B_k полагаем: $\varepsilon_{k+1} = \frac{\mu B_k}{3}$, $N_{k+1} = 2\,u_{k+1}$, B_{k+1} — такое измеримое подмножество в $\mathbf{\Omega}$ и n_{k+1} — такое натуральное число, что множества

$$B_{k+1}, \theta B_{k+1}, \ldots, \theta^{n_{k+1}} B_{k+1}, \theta^{n_{k+1}+1} B_{k+1}$$

попарно не пересекаются,

$$2\,n_{k+1}\,\mu B_{k+1} < \varepsilon_{k+1} = \frac{\mu B_k}{3}$$

и

$$n_{k+1}\,\beta_{n_{k+1}}\,\mu B_{k+1} > N_{k+1} = 2\,u_{k+1}.$$

Пусть

$$B_{1\,2} = \left\{ x \in B_1 \colon \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_2+1} \theta^i B_2 \quad \text{для некоторого} \quad j \in \{0, 1 \ldots, n_1 + 1\} \right\}.$$

Так автоморфизм θ сохраняет меру, то

$$\mu B_{1\,2} \leq \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n_2+1} \theta^i B_2 \right) = (n_2 + 2) \mu B_2 \leq 2\,n_2\,\mu B_2 < \frac{\mu B_1}{3}.$$

Аналогично, пусть

$$B_{1\,3} = \left\{ x \in B_1 \colon \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_3+1} \theta^i B_3 \quad \text{для некоторого} \quad j \in \{0, 1 \ldots, n_1 + 1\} \right\}.$$

Тогда
$$\mu B_{1\,3}^{j_2} \le \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n_3+1}\theta^i B_3\right) = (n_3+2)\mu B_3 \le 2\,n_3\,\mu B_3 < \frac{\mu B_2}{3} <$$
$$< \frac{2\,n_2\,\mu B_2}{3} < \frac{\mu B_1}{3^2}.$$
Продолжая процесс, мы для каждого $k \ge 2$ построим множество
$$B_{1\,k} = \left\{x \in B_1 \colon \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_{k+1}+1}\theta^i B_k \quad \text{для некоторого} \quad j \in \{0,1\dots,n_1+1\}\right\}.$$
Тогда
$$\mu B_{1\,k} \le \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n_{k+1}+1}\theta^i B_k\right) = (n_{k+1}+2)\mu B_k \le 2\,n_{k+1}\,\mu B_k < \frac{\mu B_k}{3} <$$
$$< \frac{2\,n_k\,\mu B_k}{3} < \frac{\mu B_{k-1}}{3^2} < \dots < \frac{\mu B_1}{3^{k-1}}.$$
Положим
$$\widehat{A}_{n_1} = B_1 \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} B_{1\,k}\right).$$
Тогда
$$\mu\widehat{A}_{n_1} \ge \mu B_1 - \sum_{k=2}^{\infty}\mu B_{1\,k} > \mu B_1 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu B_1}{3^{k-1}} = \mu B_1 - \mu B_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}} =$$
$$= \mu B_1 - \frac{\mu B_1}{2} = \frac{\mu B_1}{2}.$$
Из построения множества $\widehat{A}_{n_1}$ следует, что множества
$$\widehat{A}_{n_1}, \theta\widehat{A}_{n_1}, \theta^2\widehat{A}_{n_1}, \dots, \theta^{n_1+1}\widehat{A}_{n_1}$$
попарно не пересекаются и
$$n_1\,\beta_{n_1}\,\mu\widehat{A}_{n_1} > n_1\,\beta_{n_1}\,\frac{\mu B_1}{2} > u_1.$$
Положим
$$C_k = \bigcup_{i=0}^{n_k+1}\theta^i B_k, \quad k = 2,3,\dots.$$
Тогда для любого $j \in \{0,1\dots,n_1+1\}$ и любого $k \ge 2$ множества $\theta^j\widehat{A}_{n_1}$ и C_k не пересекаются.

Аналогично, для любого $m \ge 2$ и любого $k > m$ строятся множества
$$B_{m\,k} = \left\{x \in B_m \colon \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_k+1}\theta^i B_k \quad \text{для некоторого} \quad j \in \{0,1\dots,n_m+1\}\right\}.$$

При этом,

$$\mu B_{m\,k} < \frac{\mu B_m}{3^{k-m}}.$$

Полагая, как и выше,

$$\widehat{A}_{n_m} = B_m \setminus \left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} B_{m\,k} \right),$$

получим, что

$$\mu \widehat{A}_{n_m} \geq \mu B_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu B_{m\,k} > \mu B_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu B_m}{3^{k-m}} = \mu B_m - \mu B_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-m}} =$$

$$= \mu B_m - \frac{\mu B_m}{2} = \frac{\mu B_m}{2}.$$

При этом, множества

$$\widehat{A}_{n_m}, \theta \widehat{A}_{n_m}, \theta^2 \widehat{A}_{n_m}, \ldots, \theta^{n_m+1} \widehat{A}_{n_m}$$

попарно не пересекаются,

$$n_m\,\beta_{n_m}\,\mu \widehat{A}_{n_m} > n_m\,\beta_{n_m}\,\frac{\mu B_m}{2} > u_m,$$

и если

$$C_k = \bigcup_{i=0}^{n_k+1} \theta^i B_k, \quad k = m+1, m+2, \ldots,$$

то для любого $j \in \{0, 1 \ldots, n_m + 1\}$ и любого $k \geq m+1$ множества $\theta^j \widehat{A}_{n_m}$ и C_k также не пересекаются.

Таким образом, мы построили такую систему попарно не пересекающихся множеств

$$\widehat{A}_{n_1}, \theta \widehat{A}_{n_1}, \theta^2 \widehat{A}_{n_1}, \ldots, \theta^{n_1+1} \widehat{A}_{n_1},$$
$$\widehat{A}_{n_2}, \theta \widehat{A}_{n_2}, \theta^2 \widehat{A}_{n_2}, \ldots, \theta^{n_2+1} \widehat{A}_{n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\widehat{A}_{n_m}, \theta \widehat{A}_{n_m}, \theta^2 \widehat{A}_{n_m}, \ldots, \theta^{n_m+1} \widehat{A}_{n_m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

что

$$n_k\,\beta_{n_k}\,\mu \widehat{A}_{n_k} > n_k\,\beta_{n_k}\,\frac{\mu B_k}{2} > u_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

В каждом множестве $\widehat{A}_{n_k}$ выберем такое подмножество A_{n_k}, что

$$\mu A_{n_k} = \frac{u_k}{n_k\,\beta_{n_k}}.$$

Получим такую систему попарно не пересекающихся множеств

$$A_{n_1}, \theta A_{n_1}, \theta^2 A_{n_1}, \ldots, \theta^{n_1+1} A_{n_1},$$

$$A_{n_2}, \theta A_{n_2}, \theta^2 A_{n_2}, \ldots, \theta^{n_2+1} A_{n_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n_m}, \theta A_{n_m}, \theta^2 A_{n_m}, \ldots, \theta^{n_m+1} A_{n_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

что

$$n_k\, \beta_{n_k}\, \mu A_{n_k} = n_k\, \beta_{n_k} \frac{u_k}{n_k\, \beta_{n_k}} = u_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим

$$A = \mathbf{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \theta^i A_{n_k} \right)$$

Покажем, что множество A удовлетворяет условиям леммы. Действительно, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ множества A_{n_k} и $\theta^{n_k+1} A_{n_k}$ входят в A, а множества $\theta A_{n_k}, \theta^2 A_{n_k}, \ldots, \theta^{n_k} A_{n_k}$ — не входят. Поэтому для $x \in A_{n_k}$

$$r_\theta^A(x) = \min\{n \geq 1 \colon \theta^n x \in A\} = n_k$$

и

$$n_k\, \beta_{n_k}\, \mu A_{n_k} = u_k$$

при $n_k > 1$. Если теперь

$$x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k},$$

то $\theta x \in A$, так как в противном случае x принадлежал бы некоторому A_{n_k}, и потому было бы

$$r_\theta^A(x) = 1,$$

т.е. $x \in A_{n_0}$. □

Следствие 1. *Для любой неограниченной последовательности* $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует такое измеримое подмножество* A *в* $\mathbf{\Omega}$*, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \beta_n\, \mu A_n = \infty.$$

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность положительных чисел, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$$

По лемме 2 существует такое измеримое подмножество A в $\mathbf{\Omega}$, что

$$n_k\, \beta_{n_k}\, \mu A_{n_k} = u_k$$

при $k > 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \beta_n\, \mu A_n = \beta_1 \mu A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, \beta_n\, \mu A_n = \beta_{n_0} \mu A_{n_0} + \sum_{n=2}^{\infty} n\, \beta_n\, \mu A_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty.$$

$\square$

3. Доказательство теоремы

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим неограниченную последовательность

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{r_n}, & n = 3\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ 0, & n \neq 3\,k, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

В силу следствия 1, существует такое измеримое подмножество A в $\mathbf{\Omega}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\beta_n\,\mu A_n = \infty.$$

Пусть

$$f \in \mathbf{L}_1, \quad f \neq \text{const}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\int_{\mathbf{\Omega}} f\,d\,\mu = 0.$$

В противном случае вместо функции f можно рассматривать функцию $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}(x) = f(x) - \int_{\mathbf{\Omega}} f\,d\,\mu \cdot 1.$$

В этом случае предельная функция $\overline{f}$ в точности равна нулю.

Пусть $\alpha > 0$ и

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{\Omega} \colon f(x) > \alpha\}.$$

Так как $f(x) \not\equiv 0$ и $\int_{\mathbf{\Omega}} f\,d\,\mu = 0$, то существует такое $\alpha_0 > 0$, что μA_{α_0}. Пусть

$$n_0 = \min\{n \colon \sum_{i=n}^{\infty} i\,\mu A_i \leq \mu A_{\alpha_0}\}.$$

Выберем в множестве A_{α_0} произвольным образом такое подмножество E, что

$$\mu E = \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} n\,\mu A_n.$$

Поскольку в пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ действует эргодическое преобразование θ, то пространство $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ обладает следующим свойством однородности: для любых двух подмножеств $A, B \subset \mathbf{\Omega}$ одинаковой меры, $\mu A = \mu B$, существует такое сохраняющее меру обратимое преобразование U, что

$$UA = B.$$

Пусть U — такое преобразование, переводящее множество E в $E' = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n$. Положим

$$\widehat{f}(x) = f(U^{-1}x).$$

Тогда функции f и $\widehat{f}$ равноизмеримы. Покажем, что чезаровские средние $A_{n,\theta}\widehat{f}$ не могут сходится к нулю со скоростью r_n ни с каким регулятором $g \in \mathbf{L}_1$ (так как $\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \widehat{f}\, d\,\mu = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} f\, d\,\mu = 0$, то предельная функция последовательности $\{A_{n,\theta}\widehat{f}\}_{n=1}^{\infty}$ есть ноль).

Действительно, для любого $x \in E'$ имеем: $U^{-1}x \in A_{\alpha_0}$, и потому

$$\widehat{f}(x) = f(U^{-1}x) > \alpha_0.$$

Обозначим:

$$C_m = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \theta^i A_m, \quad D_m = \bigcup_{i=0}^{m-1} \theta^i A_m.$$

Если $m > 2k+1$, то $\left[\frac{m}{2}\right] + k \le m-1$ и для каждого $x \in C_m$ имеем:

$$\theta^k x \in \theta^k C_m = \bigcup_{i=k}^{\left[\frac{m}{2}\right]+k} \theta^i A_m \subset \bigcup_{i=0}^{m-1} \theta^i A_m = D_m.$$

Поэтому

$$\theta^{-k}(D_m) \cap C_m = C_m$$

и при $m \ge \max\{2\,k+1,\, n_0\}$ имеем:

$$T^k(\widehat{f}\chi(D_m))(x)\chi(C_m)(x) = (\widehat{f}\chi(D_m))(\theta^k x)\chi(C_m)(x) =$$

$$= \widehat{f}(\theta^k x)\chi(D_m)(\theta^k x)\chi(C_m)(x) = \widehat{f}(\theta^k x)\chi(C_m)(x) \ge \alpha_0\chi(C_m)(x),$$

т.е.

$$T^k(\widehat{f}\chi(D_m))(x)\chi(C_m) \ge \alpha_0\chi(C_m).$$

Заметим, что если $j \ne m$ и $m > 2k+1$, то

$$\mu\left(C_m \cap \theta^{-k} D_j\right) = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \chi(C_m)\chi(\theta^{-k}D_j)d\mu = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \chi(C_m)T^k(\chi(D_j))d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{\Omega}} T^{-k}(\chi(C_m))\chi(D_j)d\mu = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \chi(\theta^k C_m)\chi(D_j)d\mu \le \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \chi(D_m)\chi(D_j)d\mu = 0.$$

Следовательно, множества C_m и θ^{-k} не пересекаются, и потому, функции $\chi(C_m)$ и $T^k(\widehat{f}\chi(D_j))$ дизъюнктны. Таким образом, при $m \ge \max\{2n+1, n_0\}$ имеем:

$$(S_n\widehat{f})\chi(C_m) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\widehat{f}\right)\chi(C_m) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\widehat{f}\chi(D_j)\right)\chi(C_m) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(\widehat{f}\chi(D_m))\chi(C_m) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_0\chi(C_m) = \alpha_0\chi(C_m).$$

Предположим, что последовательность $\{A_{n,\theta}\widehat{f}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю со скоростью r_n с некоторым регулятором $g \in \mathbf{L}_2$. Тогда получим, что при $m \geq \max\{2k+1, n_0\}$

$$\alpha_0\chi(C_m) \leq (A_{n,\theta}\widehat{f})\chi(C_m) \leq |A_{n,\theta}\widehat{f}| \leq r_n\, g.$$

Следовательно, для каждого $k = n_0, n_0+1, \ldots$

$$g(x) \geq \alpha_0 \frac{1}{r_k}\chi(C_{3k})(x).$$

Функции $\chi(C_m)$ и $\chi(C_n)$ дизъюнктны при $n \neq m$. Поэтому

$$g(x) \geq \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_k}\chi(C_{3k})(x)$$

и

$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} g(x)d\mu \geq \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\mu(C_{3k}) = \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\sum_{j=0}^{\left[\frac{3k}{2}\right]}\mu(\theta^j A_{3k}) \geq$$

$$\geq \frac{\alpha_0}{2}\sum_{k=n_0}^{\infty} 3\,k\frac{1}{r_k}\mu A_{3k} = \frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=3\,n_0}^{\infty} n\beta_n\mu A_n = \infty.$$

Таким образом, $g \notin \mathbf{L}_1$.

Список литературы

[1] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Общая теория — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.

[3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ — Москва: Наука, 1977. — 742 с.

[4] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.

[5] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I. Sequemce Spaces. Springer, 1979.

[6] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.

[7] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.

[8] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.

[9] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.
[10] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.
[11] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Орлича // Ученые записки ТНУ. — 2010. — Т. 23(62), № 1. — С. 96 – 111.
[12] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Лоренца // Динамические системы. — Межведомственный научный сборник. — 2010. — Вып. 28. — С. 79 – 86.
[13] Халмош П. Лекции по эргодической теории —Ижевск:НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика". — 2001. — 132 с.

Збіжність з регуляторім в єргодичних теоремах

У даній роботі вивчаеться збіжность з регуляторим в симетричних просторах $\mathbf{E}$ *вимірних функцій на просторі* $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ *з скінченной непрерівної мірой* μ. *Тоді, коли* $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$, *доведено, что для кожного сберегающего міру єргодичного видображення* θ, *кожної последовности* $r_n \to 0$ *та кожної функции* $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq const$ *знайдеться функція* $\widehat{f}$, *яка равнозмірення з* f, *що из* $|A_{n,\theta}\widehat{f} - \overline{f}| \leq r_n g, \quad n = 1, 2, \ldots$ *слідуе* $g \notin \mathbf{L}_1$.

Ключові слова:простори з мірой, єргодичні теореми, збіжність з регуляторім

Convergence with a regulator in Ergodic Theorems

Let $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ *be a measure space with the considered measure is finite and continuous,* $\mu\Omega = 1$. *A sequence of measurable functions* $\{f_n\}$ *is said to be convergent to* f *with a regulator* g *and a rate* $\{r_n\}$, $r_n \to 0$, *if* $|f_n - f| \leq r_n g$ *for all* $n = 1, 2, \ldots$. *Let* $A_{n,\theta} f = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}$, *where* θ *be an ergodic measure preserving transformation on* $(\mathbf{\Omega}, \mu)$. *It follows from the pointwise ergodic theorem that for every* $f \in \mathbf{L}_1$ *the sequence* $\{A_{n,\theta} f\}$ *converges to* $\overline{f} = \int f d\mu$ *with a regulator* g *from the space of measurable functions.*

Theorem. For every ergodic measurable preserving transformation θ, *each rate* $r_n \to 0$ *and every* $f \in \mathbf{L}_1$, *there exists an equemeasurable to* f *function* $\widehat{f}$ *such that the condition* $|A_{n,\theta}\widehat{f} - \overline{f}| \leq r_n g, \quad n = 1, 2, \ldots$ *implies* $g \notin \mathbf{L}_1$.

Keywords: measure space, ergodic theorems, convergence with a regulator