Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 23–31.

УДК 517.98

И. И. Карпенко, А.М. Гончаренко

ОДНОВРЕМЕННАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАТЕРНИОННЫХ НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ

В работе рассматриваются задачи одновременной диагонализации пары кватернионных матриц, самосопряженных относительно неэрмитовой инволюции в вещественной алгебре кватернионов (a–самосопряженные матрицы). Получены критерии унитарной и невырожденной диагонализации таких матриц.

Ключевые слова: алгебра кватернионов, алгебра с инволюцией, матричная диагонализация.

Введение. Настоящая работа является непосредственным продолжением результатов, изложенных в [1]. Известно, что одни из первых постановок задач об одновременном приведении комплексных матриц к диагональному виду посредством некоторого преобразования конгруэнтности связаны с изучением "малых колебаний"около точки равновесия в механике. В комплексном случае для пары самосопряженных и соответственно для пары симметрических матриц получен ряд условий их одновременного приведения в диагональному виду. И если для эрмитово самосопряженных кватернионных матриц мы всегда легко получаем аналогичные результаты, то решение задачи одновременной диагонализации внутренними методами (т.е. с помощью кватернионной матрицы) для пары неэрмитово самосопряженных матриц является далеко не очевидным.

Используя особенности спектральных свойств кватернионных матриц, в работе приводятся четыре критерия одновременной диагонализации двух неэрмитово самосопряженных матриц.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра кватернионов, в которой для каждого кватерниона $q = q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ наряду с классической инволюцией $\overline{q} = q_0-q_1i-q_2j-q_3k$ можно рассматривать инволюцию $\widehat{q} = q_0 + q_1i - q_2j + q_3k$ (более подробно см. [1]).

Эти инволюции алгебры $\mathbb{H}$ порождают инволюции $(^a)$ и $(^*)$ в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{H})$. Пусть $A \in M_n(\mathbb{H})$, $\quad A = \|a_{st}\|$. Вводя следующие обозначения:

$$\overline{A} = \|\overline{a}_{st}\|, \quad \widehat{A} = \|\widehat{a}_{st}\|,$$

определим

$$A^* := \overline{A}\,^T; \quad A^a := \widehat{A}\,^T.$$

Заметим, что

$$A^a = -JA^*J, \tag{1}$$

где $J = Ej$, E — единичная матрица. Инволюцию $(^*)$ называют, как правило, *эрмитовой*. Поэтому инволюцию $(^a)$ мы называем *неэрмитовой*. Композиция этих инволюций порождает автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{H})$:

$$A^c := (A^*)^a = (A^a)^*,$$

где $A^c = \|a^c_{st}\|$, $\quad$ где $\quad a^c_{st} = \widehat{\overline{a}}_{st}$.

Пусть $A = \|a_{st}\| \in M_n(\mathbb{H})$. Матрицу A назовем *неэрмитово самосопряженной* (или *a–самосопряженной*), если $A = A^a$.

Ввиду равенства (1) a–самосопряженная матрица A удовлетворяет условию:

$$A^* = -JAJ.$$

В работе [1] показано, что класс a–самосопряженных кватернионных матриц является аналогом класса комплексных симметрических матриц, причем для него прослеживается сохранение целого ряда свойств симметрических матриц. В частности, имеет место аналог разложения Такаги [2], которое является базовым в теории комплексных симметрических матриц:

Теорема 1. [1] *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a-самосопряженной, то она допускает разложение вида:*

$$A = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы AA^c, Σ — неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы AA^c, соответствующих этим собственным векторам.

Пример 1. Рассмотрим обобщение ганкелевых комплексных квадратичных форм. Пусть $h_2, h_3, ..., h_{2n}$ — набор кватернионов, удовлетворяющих условию $\widehat{h}_t = h_t,\ t = \overline{2, 2n}$. При помощи этих чисел составим квадратичную форму от n переменных $x_t \in \mathbb{H},\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{H}^n$:

$$H(x, x) = \sum_{s,t=1}^{n} \widehat{x}_t h_{s+t} x_s. \tag{2}$$

По аналогии с комплексным случаем (см. [3]) назовем эту квадратичную форму *ганкелевой.* Ей соответствует матрица

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{H}),$$

удовлетворяющая условию $H^a = H$, т.е. a–самосопряженная. С учетом равенства (2) квадратичную форму $H(x, x)$ можно записать в векторном виде:

$$H(x, x) = x^a \mathcal{H} x.$$

В соответствии с разложением Такаги

$$\mathcal{H} = U^a D U,$$

где U — унитарная матрица, $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, ...d_n\},\ d_t \geq 0$. Тогда

$$H(x, x) = x^a U^a D U x = (Ux)^a D (Ux),$$

или в новых переменных $y = Ux$

$$H(y, y) = y^a D y = \sum_{t=1}^{n} d_t \widehat{y}_t y_t.$$

Таким образом, разложение Такаги дает возможность приводить ганкелевы кватернионные квадратичные формы вида (2) к диагональному (каноническому) виду.

Здесь и ниже используется такое естественное условие конгруэнтности матриц, которое сохраняет свойство неэрмитовой самосопряженности. А именно, матрицы A и B назовем *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица S такая, что

$$B = SAS^a.$$

Еще одним приложением кватернионного разложения Такаги является простое условие конгруэнтности a–самосопряженных кватернионных матриц.

Предложение 1. *a-самосопряженные матрицы A и B из $M_n(\mathbb{H})$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Доказательство. Пусть матрица $A = SBS^a$, где S — невырожденная матрица. Так как при умножении кватернионной матрицы на невырожденную матрицу ее ранг не меняется, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

Обратно, пусть $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B = r$. Рассмотрим разложение Такаги для матрицы A:

$$A = U_1 \Sigma_1 U_1^a,$$

где U_1 — унитарная матрица, $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\}$. Заметим, что $\mathrm{rank}\Sigma_1 = \mathrm{rank}A$ в силу невырожденности матриц U_1, U_1^a.

Матрицу Σ_1 можно представить следующим образом:

$$\Sigma_1 = I(\Sigma_1) D_1^2,$$

где $I(\Sigma_1) = \mathrm{diag}\{1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, $D_1 = \mathrm{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}, 1, 1, \ldots, 1\}$. Тогда

$$A = (U_1 D_1) I(\Sigma_1)(D_1 U_1^a) = (U_1 D_1) I(\Sigma_1)(U_1 D_1)^a.$$

Аналогично для матрицы B:

$$B = (U_2 D_2) I(\Sigma_2)(U_2 D_2)^a.$$

Так как $\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}A$, то $I(\Sigma_2) = I(\Sigma_1)$ и

$$(U_1 D_1)^{-1} A (U_1 D_1)^{-a} = (U_2 D_2)^{-1} B (U_2 D_2)^{-a},$$

откуда

$$A = (U_1 D_1)(U_2 D_2)^{-1} B (U_2 D_2)^{-a} (U_1 D_1)^a.$$

Следовательно, матрицы A и B конгруэнтны. □

Замечание 1. Следует напомнить не совсем очевидное определение ранга кватернионной матрицы как максимального количества линейного независимых строк в левом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$. Так как максимальное количество линейно независимых столбцов в этом модуле может быть иным, то при транспонировании, а, следовательно, и при эрмитовом сопряжении ранг матрицы может измениться. Однако можно показать, что операция неэрмитова сопряжения *не меняет* ранга матрицы.

2. Одновременная диагонализация неэрмитово самосопряженных матриц

Лемма 1. (i) *Матрица $C \in M_n(\mathbb{H})$ является нормальной тогда и только тогда, когда C^a — нормальная матрица.*

(ii) *Матрица $U \in M_n(\mathbb{H})$ является унитарной тогда и только тогда, когда U^a — унитарная матрица.*

Доказательство. Утверждение (i) доказывается непосредственной проверкой с использованием равенства (1).

Утверждение (ii) является следствием утверждения (i). □

Для более детального понимания дальнейших рассуждений приведем ряд сведений относительно спектральных свойств кватернионных матриц (см. [4], [5]).

Пусть $A \in M_n(\mathbb{H})$. Кватернион $q \in \mathbb{H}$ называется *собственным значением* матрицы A, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{H}^n$ такой, что $Ax = xq$.

Множество всех собственных значений матрицы A обозначим через $\sigma(A)$. При этом если $q \in \sigma(A)$, то $K(q) \subset \sigma(A)$, где $K(q) = \{uq\overline{u} \mid u \in \mathbb{H},\ |u| = 1\}$ — класс сопряженности кватерниона q. Количество классов сопряженности, составляющих спектр матрицы, всегда конечно, и каждый класс содержит ровно одну пару взаимно сопряженных чисел, принадлежащих полю $\mathbb{C}$.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ называется *нормальной*, если $A^*A = AA^*$. Нормальная кватернионная матрица допускает унитарную диагонализацию, причем все собственные значения в соответствующем разложении могут быть выбраны из верхней полуплоскости поля $\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{H})$, причем матрица A является a-самосопряженной и невырожденной, матрица B — a-самосопряженной, $C = A^{-1}B$. Матрицы UAU^a и UBU^a диагональны для некоторой унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда C — нормальная матрица.*

Доказательство. Пусть $UAU^a = \Sigma$, $UBU^a = \Lambda$, где Σ, Λ — диагональные a-самосопряженные матрицы. Так как $A = U^{-1}\Sigma U^{-a}$, $\quad B = U^{-1}\Lambda U^{-a}$, то $C = A^{-1}B = U^a(\Sigma^{-1}\Lambda)U^{-a}$, где матрица $\Sigma^{-1}\Lambda$ является диагональной. Из Леммы 1 следует, что U^a — унитарная матрица, поэтому C — нормальная матрица.

Обратно, пусть $C = A^{-1}B$ — нормальная матрица. Тогда C унитарно диагонализуема посредством унитарной матрицы $R \in M_n(\mathbb{H})$ и диагональной матрицы $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ таких, что $C = R\Lambda R^*$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\Lambda \in M_n(\mathbb{C}_+)$, откуда $\Lambda^a = \Lambda$.

Следовательно, $BR = AR\Lambda$ и

$$R^aBR = R^aAR\Lambda, \tag{3}$$

причем, согласно Лемме 1 R^a — также унитарная матрица.

Пусть совпадающие числа λ_t сгруппированы так, что

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{bmatrix},$$

где $\Lambda_t = \mu_t E \in M_{n_t}(\mathbb{H}),\ \mu_t \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\},\ 1 \le n_t \le n,\ t = \overline{1,p}$ и $\mu_t \ne \mu_s$, если $t \ne s$.

Рассмотрим конгруэнтные матрицы $\widetilde{B} := R^aBR$ и $\widetilde{A} := R^aAR$, которые также являются a-самосопряженными, причем из равенства (3) следует

$$\widetilde{B} = \widetilde{A}\Lambda, \tag{4}$$

или, переходя к a-сопряжению,

$$\widetilde{B} = \Lambda\widetilde{A}. \tag{5}$$

Пусть $\widetilde{B} = [\widetilde{B}_{st}]$, $\quad \widetilde{A} = [\widetilde{A}_{st}]$, где $\widetilde{B}_{st},\ \widetilde{A}_{st}$ — блоки, согласованные с блочной структурой матрицы Λ, при этом $\widetilde{B}^a_{st} = \widetilde{B}_{ts}$, $\quad \widetilde{A}^a_{st} = \widetilde{A}_{ts}$.

Из равенств (4), (5) следует, что

$$\widetilde{B}_{st} = \widetilde{A}_{st}\mu_t, \quad \widetilde{B}_{st} = \mu_s\widetilde{A}_{st},$$

откуда $\widetilde{A}_{st}\mu_t = \mu_s\widetilde{A}_{st}$.

Пусть $a^{(st)}_{uv}$ — произвольный элемент матрицы $\widetilde{A}_{st}$, $a^{(st)}_{uv} = x_{uv}+y_{uv}j$, где $x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$. Тогда $(x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t = \mu_s(x_{uv} + y_{uv}j)$ или

$$\begin{cases} x_{uv}\mu_t = \mu_s x_{uv}, \\ y_{uv}\overline{\mu_t} = \mu_s y_{uv}. \end{cases}$$

Если $s \neq t$, то $\mu_s \neq \mu_t,\ \mu_s \neq \overline{\mu_t}$, откуда $x_{uv} = y_{uv} = 0$ и $\widetilde{A}_{st} = 0$ для любого $s \neq t$. Это означает, что матрицы R^aBR и R^aAR имеют блочную структуру, согласованную со структурой матрицы Λ, то есть:

$$\widetilde{B} = R^aBR = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{bmatrix};\ \widetilde{A}\Lambda = R^aAR\Lambda = \begin{bmatrix} A_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\mu_p \end{bmatrix},$$

где все матрицы $A_t, B_t \in M_{n_t}(\mathbb{H}), t = \overline{1,p}$, a-самосопряженные. При $p = n$ получаем тем самым требуемое приведение. При $p < n$ имеется блок размера $n_t > 1$.

Применим к каждой такой матрице A_t разложение Такаги:

$$A_t = S_i\Sigma_t S^a_t, \tag{6}$$

где $S_t, \Sigma_t \in M_{n_t}(\mathbb{H})$, S_t — унитарные матрицы, а Σ_t — вещественные диагональные матрицы с неотрицательными элементами.

Так как $B_t = \mu_t A_t = A_t\mu_t$, то для любого элемента $a^t_{uv} = x_{uv}+y_{uv}j, \quad x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$ матрицы A_t имеет место равенство

$$\mu_t(x_{uv} + y_{uv}j) = (x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t,$$

откуда $(\mu_t - \overline{\mu_t})y_{uv} = 0$. Следовательно, для $\mu_t \neq \overline{\mu_t} \quad y_{uv} = 0$ и A_t — комплексная симметрическая матрица. Поэтому на (6) можно смотреть как на разложение Такаги для комплексных симметрических матриц, и матрица S_t здесь также комплексная. Таким образом, в любом случае и для $\mu_t \in \mathbb{R}$, и для $\mu_t \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$B_t = \mu_t(S_t\Sigma_t S^a_t) = S_t(\mu_t\Sigma_t)S^a_t, \quad t = \overline{1,p}.$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_k \end{bmatrix},$$

где $S_t = [1]$ при $n_t = 1$. Полученная матрица S также унитарная, и справедливы разложения

$$R^a B R = S(\Sigma\Lambda)S^a, \quad R^a A R = S\Sigma S^a,$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= [(R^{-1})^a S]\Sigma[(R^{-1})^a S]^a, \\ B &= [(R^{-1})^a S]\Sigma\Lambda[(R^{-1})^a S]^a. \end{aligned}$$

Следовательно, матрицы A, B диагонализуемы при помощи унитарной матрицы $U = (R^{-1})^a S$. □

Аналогичными рассуждениями можно установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Матрица A является a–самосопряженной и невырожденной, матрица B — a–самосопряженной, $C = A^{-1}B$. Матрицы SAS^a и SBS^a диагональны для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда C — диагонализуема.*

Лемма 2. *Пусть задана матрица вида $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{H})$, где $B \in M_k(\mathbb{H}),\quad 1 \le k \le n$. Матрица A — нормальная тогда и только тогда, когда матрица B является нормальной и $C = 0$.*

Доказательство. Как показывают непосредственные вычисления,

$$AA^* = \begin{bmatrix} BB^* + CC^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} B^*B & B^*C \\ C^*B & C^*C \end{bmatrix}.$$

Так как A — нормальная матрица, то из равенства $AA^* = A^*A$ получаем условия

$$BB^* + CC^* = B^*B, \quad B^*C = 0, \quad C^*C = 0.$$

Следовательно, $C = 0$ и $BB^* = B^*B$. □

Теорема 4. *Если матрицы A и B a–самосопряженные, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ такой, что обе матрицы UAU^a и UBU^a диагональны, является нормальность матрицы AB^*.*

Доказательство. Пусть $UAU^a = \Lambda,\ UBU^a = M$, где матрицы Λ, M — диагональные. Тогда $A = U^*\Lambda,\ (U^a)^*B = U^*M(U^a)^*$, и

$$AB^* = U^*\Lambda(U^a)^*U^aM^*U = U^*(\Lambda M^*)U.$$

Заметим, что здесь мы использовали тот факт, что U^a — унитарная матрица в силу Леммы 1(ii). Следовательно, матрица AB^* унитарно диагонализуема, т.е. нормальная.

Обратно, пусть A невырожденная матрица, и матрица $AB^* = (A^{-1})^{-1}B^*$ нормальная. Тогда по теореме 2 две a–самосопряженные матрицы A^{-1} и B^* одновременно унитарно диагонализуемы. Это означает существование унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ и диагональных матриц $M, \Lambda \in M_n(\mathbb{H})$ таких, что

$$A^{-1} = U\Lambda U^a, \quad B^* = UMU^a.$$

Тогда $\quad A = (U^a)^*\Lambda^{-1}U^*, \quad B = (U^a)^*M^*U^*$, то есть A и B одновременно приводятся к диагональному виду унитарным преобразованием.

В случае вырожденности матрицы A требуются дополнительные аргументы. В силу теоремы Такаги, найдется унитарная матрица $U \in M_n(\mathbb{H})$, при которой матрица UAU^a диагональна. Переставляя при необходимости столбцы матрицы U, приходим к представлению:

$$UAU^a = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\Sigma \in M_k(\mathbb{H}), \quad 1 \le k < n$, в котором матрица Σ диагональная и невырожденная. Матрицу UBU^a разобьем на блоки того же размера:

$$UBU^a = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^a & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} \in M_k(\mathbb{H}), \quad B_{22} \in M_{n-k}(\mathbb{H}).$$

При этом подматрицы B_{11} и B_{22} также a-самосопряженные, и справедливы равенства:

$$(UAU^a)(UBU^a)^* = UAB^*U^* = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ (B_{12}^a)^* & B_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma B_{11}^* & \Sigma B_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица UAB^*U^* нормальная, поэтому в силу Леммы 2 имеем $\Sigma B_{12}^* = 0$. Матрица Σ невырожденная, поэтому $B_{12} = 0$. Следовательно,

$$UAU^a = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad UBU^a = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

и

$$(UAU^a)(UBU^a)^* = \begin{bmatrix} \Sigma B_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обращаясь к предыдущим рассуждениям для невырожденного случая, заключаем, что существует унитарная матрица $V_1 \in M_k(\mathbb{H})$ и диагональные матрицы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in M_n(\mathbb{H})$ такие, что

$$\Sigma = V_1\Lambda_1V_1^a, \quad B_{11} = V_1\Lambda_2V_1^a.$$

Для a-самосопряженной матрицы B_{22} также существуют, как известно, унитарная матрица $V_2 \in M_{n-k}(\mathbb{H})$ и диагональная матрица $\Lambda_3 \in M_{n-k}(\mathbb{H})$ такие, что

$B_{22} = V_2 \Lambda_3 V_2^a$. Положим $\Lambda = \Lambda_1 \oplus 0 \in M_n(\mathbb{H})$, $\quad M = \Lambda_2 \oplus \Lambda_3$ и $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда $UAU^a = V\Lambda V^a$, $\quad UBU^a = VMV^a$. Таким образом, матрицы

$$A = (U^*V)\Lambda(U^*V)^a, \quad B = (U^*V)M(U^*V)^a$$

одновременно диагонализуются одним унитарным преобразованием. □

Подобное обоснование позволяет получить и более общий результат для невырожденной конгруэнтности.

Теорема 5. *Если матрицы A и B a–самосопряженные, то необходимым и достаточным условием существования невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbb{H})$ такой, что обе матрицы SAS^a и SBS^a диагональны, является диагонализуемость матрицы AB^*.*

Выводы

В работе получено четыре критерия одновременной диагонализации двух неэрмитово самосопряженных матриц над телом кватернионов.

Список литературы

[1] Карпенко И.И. *Неэрмитово самосопряженные матрицы над телом кватернионов* //Ученые записки ТНУ, серия "Физ.-мат.науки Т.23(62).2. – Симферополь, 2010. – С.78–91.

[2] Хорн З., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989. – 655 С.

[3] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – Москва: Наука, 1967. – 576 С.

[4] Farenick Douglas R., Pidkowich Barbara A.F. *The spectral theorem in quternions.* // Linear Algebra and its Applications. - 371 (2003). - P.75-102.

[5] De Leo S., Scolarici G., Solombino L. *Quaternionic eigenvalue problem* // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

У роботі розглядаються задачі одночасної диагонализации пари кватерніонних матриць, самоспряжених щодо операції неэрмитовой інволюції в дійсній алгебрі кватерніонів.

Ключові слова: алгебра кватерніонів, алгебри із інволюцієй, матричная диагонализация.

In this paper it's considered problems of simultaneous diagonalization for quaternionic matrixes which are a self-adjoint concerning the non-Hermitian involution in the real algebra of quaternions. Some criterions of unitary and nonsingular diagonalizations for such matrixes are received.

Keywords: algebra of real quaternions, involution algebra, matrix diagonalization.