Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 19–39.

УДК 517.9:532

Э. И. Батыр

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследуется начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов, т.е. маятников с жидким наполнением, присоединенных один к другому. Формулируется теорема существования решений задачи Коши; описываются свойства нормальных колебаний; известная теорема Н.Е. Жуковского переносится на случай движения системы трех сочлененных гиростатов.

Ключевые слова: система трех сочлененных гиростатов, идеальная несжимаемая жидкость.

Уравнения малых колебаний гидромеханической системы.

Рассмотрим систему трех тел G_k, $k=\overline{1,3}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами. Первое тело $G_1 \subset \mathbb{R}^3$ имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k, при $k=2,3$ – соответственно точки O_k, соединяющие шарниром тело G_k и G_{k-1}. Каждое тело $G_k \subset \mathbb{R}^3$ имеет полость Ω_k, заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_k > 0$, $k=\overline{1,3}$.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений – силовое поле

$$\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x),$$

где $\vec{f}(t,x)$ – малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы сочлененных гиростатов введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^j$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы $\vec{g}=-g\vec{e}^3$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телом G_k. Единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^j$, $j=\overline{1,3}$,

$k=\overline{1,3}$. Кроме того, будем считать, что центр масс C_k гиростата G_k находится на оси $O_kx_k^3$, $k=\overline{1,3}$, а в состоянии покоя все точки O_k и C_k расположены на одной вертикальной оси, $k=\overline{1,3}$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t)=\sum_{j=1}^{3}\delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j},\quad k=\overline{1,3}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет, очевидно, равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела - величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2=d\vec{\omega}_k/dt$.

Обозначим через m_k массу k-го тела, а через $\vec{r}_k$ - радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k=\overrightarrow{O_kO_{k+1}},\quad k=1,2.$

Приведем теперь для каждого из гиростатов G_k линеаризованное уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_k, $k=1,2,3$, а также следствия из этой совокупности уравнений. Вид этих уравнений можно найти в [1], стр. 129-132, с.145, с.336, а также в [2]–[3]. Из этих уравнений следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение, приходим к следующим уравнениям движения трех сочлененных гиростатов:

$$\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}d\Omega_1+$$
$$+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\right)dm_2+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+$$
$$+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=$$
$$=\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\vec{f}_2dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_1;\quad(1)$$

$$\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)dm_2+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}d\Omega_2+\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)dm_2+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+$$

$$+\alpha_1(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)-\alpha_2(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+g(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2=$$
$$=\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\vec{f}_2dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_2; \quad (2)$$

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}d\Omega_3+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)dm_3+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=$$
$$=\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_3; \quad (3)$$

В формулах (1)–(3): $l_k := |\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от O_k до центра масс C_k гиростата G_k,

$$P_2\vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^{2}\delta_k^j\vec{e}_k^{\,j}$$

— проекция углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на плоскость $O_kx_k^1x_k^2$, $k=\overline{1,3}$. Предполагается также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих гиростатов G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k>0$, $k=\overline{1,3}$. Далее, через $\vec{u}_k=\vec{u}_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$, обозначено поле относительной скорости движения жидкости в области Ω_k, $k=\overline{1,3}$. Наконец, использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k}(\ldots)dm_k := \int\limits_{\Omega_{0k}}(\ldots)\rho_{0k}d\Omega_k+\int\limits_{\Omega_k}(\ldots)\rho_kd\Omega_k,$$

где $\Omega_{0k}\subset G_k$ — область, занятая твердым телом постоянной плотности ρ_{0k}, а Ω_k — область, занятая жидкостью постоянной плотности ρ_k, $k=\overline{1,3}$. При этом, конечно же, нужно формально считать что в уравнениях (1)–(3) $\vec{u}_k\equiv 0$ в области Ω_{0k}, $k=\overline{1,3}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения (уравнения Эйлера) идеальной жидкости в каждой из полостей Ω_k. Каждое уравнение записано в неинерциальной системе координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанной с телом G_k, $k=\overline{1,3}$. Вид этих уравнений можно найти в [1], а также в [2]–[3]. Имеем

$$\rho_1\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right) = -\nabla p_1+\rho_1\vec{f}_1, \quad \mathrm{div}\vec{u}_1=0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4)$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2\vec{f}_2, \quad \mathrm{div}\vec{u}_2=0 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (5)$$

$$\rho_3\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\rho_3\vec{f}_3,\quad \mathrm{div}\vec{u}_3=0\quad (\text{ в } \Omega_3\,); \tag{6}$$

Здесь $p_k = p_k(t,x)$ — отклонение полей давлений от их равновесных значений, а $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)\,|_{\Omega_k}$, $k=\overline{1,3}$.

В качестве граничных условий на границах $\partial\Omega_k =: S_k$, $k=\overline{1,n}$, выступают условия непротекания для идеальной жидкости:

$$\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0\quad (\text{ на } S_k\,)\quad k=\overline{1,3}, \tag{7}$$

где $\vec{n}_k$ - внешняя нормаль к области Ω_k.

Для полной математической формулировки исследуемой начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных гиростатов к уравнениям (1)—(7) следует добавить кинематические условия, которые удобно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k = P_2\vec{\omega}_k,\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\quad k=\overline{1,3}, \tag{8}$$

а также начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x),\quad x\in\Omega_k,\quad \vec{\omega}_k(0)=\vec{\omega}_k^0,\quad \vec{\delta}_k(0)=\vec{\delta}_k^0,\quad k=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Таким образом, в данной задаче искомыми являются соленоидальные векторные поля $\vec{u}_k(t,x)$, поля давлений $p_k(t,x)$, угловые скорости $\vec{\omega}_k(t)$ и угловые перемещения гиростатов $\vec{\delta}_k(t)$, $k=\overline{1,3}$. Их требуется найти из уравнений движения гиростатов (1)—(3), уравнений (4)—(6) движения жидкостей в полостях Ω_k, условий непротекания (7), кинематических соотношений (8) и начальных условий (9).

Далее для простоты считаем, что границы $\partial\Omega_k = S_k$ областей Ω_k достаточно гладкие, например, дважды непрерывно дифференцируемы, т.е.

$$S_k=\partial\Omega_k\in C^2,\quad k=\overline{1,3}. \tag{10}$$

Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (1)–(9) имеет классическое решение, т.е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных, и выведем из (1)–(9) закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

С этой целью осуществим следующие шаги. Обе части уравнений (1)–(3) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ соответственно, а обе части уравнений (4)–(6) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ соответственно и проинтегрируем по областям Ω_1, Ω_2, Ω_3. Складывая теперь левые и правые части полученных соотношений, после преобразований с использованием формул векторного анализа приходим к соотношению вида

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+$$

$$+\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Big\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Big\}=$$

$$=-\Big\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\Big\}+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k. \tag{11}$$

Это соотношение есть закон баланса полной энергии изучаемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме. Действительно, слева в (11) стоит скорость изменения по времени полной (кинетической + потенциальной) энергии системы, а справа — мощность сил трения плюс мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ соответственно, а также моментов сил $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ и $\vec{M}_3$, которые выражены через эти силы (см. выражения для них в правых частях (1)—(3)).

Начально-краевая задача о малых движениях системы сочлененных гиростатов.

Задачу (1)—(9) будем исследовать методами функционального анализа, теории уравнений в частных производных, а также теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проектирование уравнений Эйлера на ортогональные подпространства. Будем считать в задаче (1)—(9) искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$, $k=\overline{1,3}$, функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$ с обычной нормой

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)}:=\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2d\Omega_k,\quad k=\overline{1,3}, \tag{12}$$

и соответствующим скалярным произведением.

Как известно (см., например, [4], стр. 38, а также [1]), пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega_k)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_k)=\vec{J}_0(\Omega_k)\oplus\vec{G}(\Omega_k), \tag{13}$$

где $\vec{J}_0(\Omega_k)$ — подпространство соленоидальных векторных полей с условием непротекания на границе $S_k=\partial\Omega_k$, т.е.

$$\vec{J}_0(\Omega_k):=\{\vec{u}_k\in\vec{L}_2(\Omega_k):\mathrm{div}\vec{u}_k=0(\text{в}\quad\Omega_k),\quad\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k=0(\text{на}\quad S_k)\}, \tag{14}$$

а $\vec{G}(\Omega_k)$ — подпространство потенциальных полей:

$$\vec{G}(\Omega_k) := \{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \vec{u}_k = \nabla\varphi_k\}. \tag{15}$$

Здесь операции $\operatorname{div}\vec{u}_k$ и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k$ понимаются для элементов из $\vec{L}_2(\Omega_k)$ в смысле обобщенных функций (рапределений), подробную информацию об этом можно найти, например, в [1], с.98-102.

Как следует из (13)–(15), а также из соотношений (4)–(6) и граничных условий (7), для искомых полей скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ и полей давлений $\nabla p_k(t,x)$ при любом t имеют место свойства

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k), \quad k = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Опираясь на эти свойства, применим к уравнениям Эйлера (4)–(6) метод ортогонального проектирования на подпространства (13). Этот метод нашел широкое применение в задачах гидродинамики (см., например, [4], а также [1]).

Будем считать, что в уравнениях Эйлера (4)–(6) все функции являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Обозначим через $P_{0,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ ортопроектор на подпространство $\vec{J}_0(\Omega_k)$, а через $P_{G,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}(\Omega_k)$ — ортопроектор на дополнительное подпространство $\vec{G}(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Действуя ортопроекторами $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ и $P_{0,3}$ на обе части уравнений Эйлера (4), (5) и (6) соответственно и заменяя в силу сказанного выше $\partial/\partial t$ на d/dt, приходим с учетом (16) к соотношениям

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = P_{0,1}\vec{f}_1(t), \tag{17}$$

$$\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = P_{0,2}\vec{f}_2(t), \tag{18}$$

$$\frac{d\vec{u}_3}{dt} + P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = P_{0,3}\vec{f}_3(t), \tag{19}$$

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$ дают связи

$$\rho_1 P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \rho_1 P_{G,1}\vec{f}_1, \tag{20}$$

$$\rho_2 P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \rho_2 P_{G,2}\vec{f}_2, \tag{21}$$

$$\rho_3 P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \rho_3 P_{G,3}\vec{f}_3. \tag{22}$$

Из (20)–(22) следует, что поля давлений ∇p_k непосредственно вычисляются через угловые ускорения $d\vec{\omega}_k/dt$ и заданные функции $\vec{f}_k$; в то же время эти давления не входят в уравнения (1)–(3), описывающие движения гиростатов. Отсюда приходим к выводу, что в дальнейшем следует рассматривать систему соотношений (1)–(3), (17)–(19), (8)–(9).

Преобразования уравнений движения гиростатов. Соотношения (17)–(19) также позволяют вычислить непосредственно поля $d\vec{u}_k/dt$ через $d\vec{\omega}_k/dt$ и $\vec{f}_k$, $k = \overline{1,3}$. Подставляя эти выражения для $d\vec{u}_k/dt$ в уравнения (1)–(3), затем вычисляя выражения $\int\limits_{G_k} (\ldots)\, dm_k$ согласно его определению и группируя слагаемые в виде интегралов $\int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots)\, d\Omega_{0k}$ и $\int\limits_{\Omega_k} (\ldots)\, d\Omega_k$, получим следующие уравнения движения гиростатов:

$$
\begin{gathered}
\rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(P_{G,1} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) \right) d\Omega_1 + \\
+ \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) \right) d\Omega_2 + \\
+ \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) d\Omega_{03} + \\
+ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) \right) d\Omega_3 + \\
\alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \right) + g \left(m_1 l_1 + \left(m_2 + m_3 \right) h_1 \right) P_2 \vec{\delta}_1 = \\
= \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \vec{f}_{01} d\Omega_{01} + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \vec{f}_{02} d\Omega_{02} + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \\
+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(P_{G,1} \vec{f}_1 \right) d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2} \vec{f}_2 \right) d\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3} \vec{f}_3 \right) d\Omega_3 \equiv \tilde{M}_1 (t);
\end{gathered}
\tag{23}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) \right) d\Omega_2 + \\
+ \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) d\Omega_{03} + \\
+ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) \right) d\Omega_3 + \\
+ \alpha_1 \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \right) - \alpha_2 \left(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2 \right) + g \left(m_2 l_2 + m_3 h_2 \right) P_2 \vec{\delta}_2 =
\end{gathered}
$$

$$= \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \vec{f}_{02} d\Omega_{02} + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} +$$

$$+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2} \vec{f}_2 \right) d\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3} \vec{f}_3 \right) d\Omega_3 \equiv \tilde{M}_2\,(t)\,; \quad (24)$$

$$\rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) d\Omega_{03} +$$

$$+ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) \right) d\Omega_3 +$$

$$+ \alpha_3 \left(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2 \right) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 =$$

$$= \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3} \vec{f}_3 \right) d\Omega_3 \equiv \tilde{M}_3\,(t)\,, \quad (25)$$

где использовано соотношене $I_k - P_{0,k} = P_{G,k}$, а I_k — единичный оператор в $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Таким образом, влияние движения жидкости в области Ω_k состоит в том, что в (23)–(25) единичные операторы I_k заменены операторами ортогонального проектирования $P_{G,k}$ на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Заметим еще, что если поля $\vec{f}_k$ потенциальны, то $P_{G,k}\vec{f}_k = \vec{f}_k$, и тогда моменты внешних сил $\tilde{M}_k(t) \equiv \vec{M}_k(t)$, $k = \overline{1,3}$.

Подводя итоги этим преобразованиям, отметим, что теперь следует изучать задачу динамики гиростатов, исходя из уравнений (23)–(25), кинематических соотношений (8) и начальных условий (9) для $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$, $k = \overline{1,3}$. При этом поля скоростей и давлений жидкости находятся по $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$ посредством формул (17)–(19) и (20)–(22).

Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Будем считать, что в задаче (23)–(25), (8), (9) искомым объектом является вектор-столбец

$$\vec{\delta}(t) := \left(\vec{\delta}_1(t); \vec{\delta}_2(t); \vec{\delta}_3(t) \right)^{\tau}, \quad (26)$$

где индекс $(...)^{\tau}$ означает транспонирование (в данном случае строки). Тогда, в силу (8) имеем

$$\vec{\omega}(t) := (\vec{\omega}_1(t); \vec{\omega}_2(t); \vec{\omega}_3(t))^{\tau} = d\vec{\delta}(t)/dt, \quad d\vec{\omega}(t)/dt = d^2\vec{\delta}(t)/dt^2. \quad (27)$$

Эти соотношения позволяют трактовать совокупность уравнений (23)–(25) как одно дифференциальное уравнение вида

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + A\frac{d\vec{\delta}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \quad (28)$$

рассматриваемое в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \tag{29}$$

с соответствующей нормой

$$||\vec{\delta}||^2_{\mathcal{H}} = |\vec{\delta}_1|^2 + |\vec{\delta}_2|^2 + |\vec{\delta}_3|^2, \tag{30}$$

а также тривиальную задачу (см. (8), (9))

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k = \vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3}. \tag{31}$$

При этом

$$\vec{\delta}^0 := \left(\vec{\delta}^0_1; \vec{\delta}^0_2; \vec{\delta}^0_3\right)^\tau, \quad \vec{\omega}^0 := \left(\vec{\omega}^0_1; \vec{\omega}^0_2; \vec{\omega}^0_3\right)^\tau, \quad \vec{M}(t) := \left(\vec{\tilde{M}}_1(t); \vec{\tilde{M}}_2(t); \vec{\tilde{M}}_3(t)\right)^\tau, \tag{32}$$

а операторные матрицы

$$C = (C_{lm})^3_{l,m=1}, \quad A = (A_{lm})^3_{l,m=1}, \quad B = (B_{lm})^3_{l,m=1}, \tag{33}$$

элементы которых определяются соответствующими выражениями из (23)—(25), стоящими при d^2/dt^2, d/dt и самой искомой функции, заданы посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} C_{11}\vec{\delta}_1 := \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right)\right) d\Omega_1 + \\ + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} C_{12}\vec{\delta}_2 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{35}$$

$$C_{13}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \tag{36}$$

$$\begin{aligned} C_{21}\vec{\delta}_1 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{37}$$

$$C_{22}\vec{\delta}_2 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 +$$
$$+ \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \quad (38)$$

$$C_{23}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \quad (39)$$

$$C_{31}\vec{\delta}_1 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \quad (40)$$

$$C_{32}\vec{\delta}_2 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \quad (41)$$

$$C_{33}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \quad (42)$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

а операторная матрица B диагональна и

$$B_{11}\vec{\delta}_1 := g(m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1 =: g b_{11} P_2 \vec{\delta}_1;$$
$$B_{22}\vec{\delta}_2 := g(m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 =: g b_{22} P_2 \vec{\delta}_2;$$
$$B_{33}\vec{\delta}_3 := g(m_3 l_3)P_2\vec{\delta}_3 =: g b_{33} P_2 \vec{\delta}_3. \quad (44)$$

Свойства операторных коэффициентов эволюционного уравнения. Рассмотрим, опираясь на формулы (34)—(44), общие свойства операторных матриц C, A и B дифференциального уравнения (28).

Лемма 1. *Матрица B неотрицательна и имеет трехмерное ядро, натянутое на векторы*

$$\left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_1^{\,3}\right)^\tau, \quad \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_2^{\,3}\right)^\tau, \quad \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_3^{\,3}\right)^\tau. \quad (45)$$

Лемма 2. *Матрица A является положительно определенным оператором, действующим в комплексном пространстве $\mathcal{H}$ с нормой* (30).

Теорема 1. *Операторная матрица C, элементы которой определены формулами (34) — (42), допускает представление*

$$C = C_{\text{тв}} + C_{\text{пр}} \tag{46}$$

в виде суммы операторной матрицы $C_{\text{тв}}$, связанной с движением собственно твердых сочлененных тел, и матрицы $C_{\text{пр}}$, связанной с движением идеальной жидкости в полостях этих тел. Назовем матрицу $C_{\text{пр}}$ по аналогии с термином, введенным Н.Е. Жуковским, присоединенной матрицей инерции.

Каждая из матриц в (46) является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в (комплексном) пространстве $\mathcal{H}$, при этом их квадратичные формы соответственно равны

$$\Big(C_{\text{тв}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\Big)_{\mathcal{H}} = \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\Big|\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1\Big|^2 d\Omega_{01} + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\Big|\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2\Big|^2 d\Omega_{02} + \\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\Big|\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2+\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\Big|^2 d\Omega_{03} \tag{47}$$

$$\Big(C_{\text{пр}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\Big)_{\mathcal{H}} = \rho_{1}\int\limits_{\Omega_{1}}\Big|P_{G,1}(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\Big|^2 d\Omega_{1} + \rho_{2}\int\limits_{\Omega_{2}}\Big|P_{G,2}(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\Big|^2 d\Omega_{2} + \\ + \rho_{3}\int\limits_{\Omega_{3}}\Big|P_{G,3}(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2+\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3)\Big|^2 d\Omega_{3}. \tag{48}$$

Замечание 1. Если рассмотреть для сравнения с изучаемой задачей случай, когда в полостях Ω_k содержится не идеальные жидкости, а твердые тела той же плотности ρ_k, $k=\overline{1,3}$, то такая задача о малых движениях сочлененных твердых тел снова сводится к эволюционному уравнению вида (28), где операторы A и B — те же, что и в (28), а оператор инерции $C_{\text{отв}}$ имеет вид

$$C_{\text{отв}} = C_{\text{тв}} + C_{\text{ж}}\,. \tag{49}$$

Здесь $C_{\text{тв}}$ — тот же, что был описан соотношениями (46) и (47), а $C_{\text{ж}}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, связанный с движением отвердевших жидкостей; его квадратичная форма

$$\Big(C_{\text{ж}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\Big)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\left|\sum_{j=1}^{k-1}(\vec{\delta}_j\times\vec{h}_j)+\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k\right|^2 d\Omega_k, \tag{50}$$

имеет такой же вид, как выражение (47) для $C_{\text{тв}}$.

Теорема Жуковского, потенциалы Жуковского. В задаче динамики твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, хорошо известен следующий факт, полученный Н.Е. Жуковским [7]: если поле массовых сил потенциально, то такая гидромеханическая система движется так же, как движется под действием этого поля сил другое твердое тело с измененным моментом инерции $\vec{J}_{\text{изм}} = \vec{J}_{\text{т}} + \vec{J}_{\text{пр}}$, где $\vec{J}_{\text{т}}$ — момент инерции твердого тела (без жидкости), а $\vec{J}_{\text{пр}}$ — присоединенный момент инерции, связанный с движением жидкости в полости.

Предыдущие рассмотрения задачи о малых колебаниях системы сочлененных гиростатов позволяют установить аналогичный факт.

Теорема 2. *(Обобщенная теорема Жуковского).*
Если поле внешних дополнительных массовых сил потенциально,

$$\vec{f} = \nabla f, \quad \vec{f_k} = \vec{f}|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k} = \vec{f}|_{\Omega_{0k}}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{51}$$

то система сочлененных гиростатов с полостями, целиком заполненными идеальными жидкостями, движется под действием внешних сил так же, как движется под действием этого внешнего поля сил система сочлененных твердых тел с измененной матрицей инерции, т.е. с матричным оператором (46)—(48).

Выражение (48) для квадратичной формы присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ позволяет вычислить ее, используя так называемые потенциалы Жуковского — функции переменной x, $x \in \Omega_k$, зависящие лишь от геометрических характеристик области Ω_k, $k = \overline{1,3}$. Перейдем к более подробному изложению таких построений применительно к исследуемой задаче о движении системы сочлененных гиростатов.

Введем потенциальное поле

$$P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) = (I_1 - P_{0,1})\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) =: \nabla\psi_1 \in \vec{G}(\Omega_1). \tag{52}$$

Так как $\operatorname{div}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) = 0$ и по определению (14) подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1$ также $\operatorname{div}(P_{0,1}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)) = 0$, то из (52) следует, что потенциал ψ_1 поля $\nabla\psi_1$ находится с помощью решения задачи

$$\triangle\psi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1\,), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } S_1\,), \tag{53}$$

причем для его однозначного нахождения можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\int\limits_{S_1} \psi_1 dS_1 = 0. \tag{54}$$

В самом деле, для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ нормальная компонента поля на границе $S_1 = \partial\Omega_1$ равна нулю, откуда приходим к граничному условию Неймана в задаче (53)—(54) для гармонической функции $\psi_1 = \psi_1(x)$, $x \in \Omega_k$.

Из (53)—(54) следует, что поле $\nabla\psi_1$ является потенциально-гармоническим. Этим же свойством будут обладать поля, построенные по потенциалам Жуковского.

Так как $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\vec{e}_1^{\,j}$, то решение задачи (53)—(54) можно представить в виде

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\psi_{1j}, \tag{55}$$

где $\{\psi_{1j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_1. Они являются решениями следующих задач

$$\triangle\psi_{1j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_{1j}}{\partial n_1} = \left(\vec{e}_1^{\,j} \times \vec{r}_1\right) \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } S_1), \quad \int\limits_{S_1} \psi_{1j} dS_1 = 0, \quad j = \overline{1,3}, \tag{56}$$

и зависит, как уже упоминалось выше, лишь от геометрических характеристик области Ω_1.

Введем теперь потенциальное поле, отвечающее второму слагаемому в квадратичной форме (48):

$$\nabla\psi_2 := P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) = (I_2 - P_{0,2})\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right). \tag{57}$$

Здесь постоянное поле $\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1$ уже потенциально, так как

$$\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 = \nabla\left(\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) \cdot \vec{r}_2\right). \tag{58}$$

Поэтому аналогично предыдущим построениям имеем

$$\psi_2 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) \cdot \vec{r}_2 + \sum_{j=1}^{3} \delta_2^j(t)\psi_{2j}, \tag{59}$$

где $\{\psi_{2j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_2:

$$\triangle\psi_{2j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\psi_{2j}}{\partial n_2} = \left(\vec{e}_2^{\,j} \times \vec{r}_2\right) \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на } S_2), \quad \int\limits_{S_2} \psi_{2j} dS_2 = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{60}$$

Эти функции зависят лишь от конфигурации области Ω_2.

Наконец, для третьего слагаемого из (48) соответственно определяем:

$$\nabla\psi_3 := P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right). \tag{61}$$

Тогда

$$\psi_3 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) \cdot \vec{r}_3 + \sum_{j=1}^{3} \delta_3^j(t)\psi_{3j}, \tag{62}$$

где $\{\psi_{3j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_3:

$$\triangle\psi_{3j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \frac{\partial\psi_{3j}}{\partial n_3} = \left(\vec{e}_3^{\,j} \times \vec{r}_3\right) \cdot \vec{n}_3 \quad (\text{на } S_3), \quad \int\limits_{S_3} \psi_{3j} dS_3 = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{63}$$

Определение 1. Будем называть функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^3$, определяемые формулами (55), (56), (59), (60), (62), (64), обобщенными потенциалами Жуковского, отвечающими задаче о малых движениях трех сочлененных гиростатов.

Очевидно, обобщенные потенциалы Жуковского зависят не только от конфигураций областей Ω_k, но также и от способа соединения гиростатов G_k, $k=\overline{1,3}$.

Проведенные рассмотрения показывают, что для квадратичной формы, определяемой присоединенной матрицей инерции, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Квадратичную форму присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ в задаче о колебаниях трех сочлененных гиростатов можно вычислить по формуле*

$$\left(C_{\text{пр}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{3}\rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\psi_k|^2\, d\Omega_k, \tag{64}$$

где ψ_k — обобщенные потенциалы Жуковского, выраженные через компоненты векторов $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ и $\vec{\delta}_3$ следующим образом:

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{3}\delta_1^j(t)\psi_{1j}, \quad \psi_2 = \sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_2 + \sum_{j=1}^{3}\delta_2^j(t)\psi_{2j}, \tag{65}$$

$$\psi_3 = \sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_3 + \sum_{m=1}^{3}\delta_1^m\left(\vec{e}_2^{\,m}\times\vec{h}_2\right)\cdot\vec{r}_3 + \sum_{j=1}^{3}\delta_3^j(t)\psi_{3j}, \tag{66}$$

ψ_{kj} — потенциалы Жуковского, определяемые однозначно по решениям задач (56), (60)*,* (64)*.*

Таким образом, при исследовании задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов необходимо предварительно вычислить потенциалы Жуковского для областей Ω_k, $k=\overline{1,3}$, целиком заполненных идеальной жидкостью.

О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов. Опираясь на дифференциальное уравнение (28) и связь (31), на соответствующие начальные условия (см. (28), (32)) и свойства операторных коэффициентов A, B и C, выраженные в леммах 1, 2 и теореме 1, рассмотрим вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (1)—(9) о колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (1)—(9) *выполнены следующие условия:*

$$\vec{u}_k^0 \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{R}^3, \quad k=\overline{1,3}, \tag{67}$$

а малое внешнее поле $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ удовлетворяет следующим свойствам: поля

$$\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k}(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_{0k}}, \quad k=\overline{1,3}, \tag{68}$$

являются непрерывными функциями $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в пространствах* $\vec{L}_2(\Omega_k)$ *и* $\vec{L}_2(\Omega_{0k})$ *соответственно.*

Тогда задача (1)–(9) *имеет единственное решение на отрезке* $[0, \quad T]$*, которое обладает следующими свойствами:*

1^0*. Функции* $\vec{\delta}_k(t)$ *являются дважды непрерывно дифференцируемыми по* $t \in [0, \quad T]$ *вектор-функциями со значениями в* $\mathbb{C}^3$*, т.е.*

$$\vec{\delta}_k(t) \in C^2\left([0, \quad T]; \mathbb{C}^3\right), \quad k = \overline{1, n}; \tag{69}$$

соответственно функции $\vec{\omega}_k(t)$ *обладают свойствами*

$$\vec{\omega}_k(t) \in C^1\left([0, \quad T]; \mathbb{C}^3\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{70}$$

2^0*. Поля скоростей* $\vec{u}_k(t, x)$*,* $x \in \Omega_k$*, являются непрерывно дифференцируемыми по* t *функциями при* $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в* $\vec{J}_0(\Omega_k)$*:*

$$\vec{u}_k(t, x) \in C^1\left([0, \quad T]; \vec{J}_0\left(\Omega_k\right)\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{71}$$

3^0*. Поля давлений* $\vec{p}_k(t, x)$*,* $x \in \Omega_k$*, обладают свойствами*

$$\nabla p_k(t, x) \in C\left([0, \quad T]; \vec{G}(\Omega_k)\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{72}$$

Иными словами, решение задачи (1)–(9) *таково, что все слагаемые во всех уравнениях являются непрерывными функциями* $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.*

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* (4)*, то для решения задачи* (1)–(9) *справедлив закон баланса полной энергии в форме* (11)*, где все слагаемые, в том числе первые производные по* t *от кинетической и потенциальной энергий, являются непрерывными функциями* $t \in [0, \quad T]$.

Нормальные колебания системы сочлененных гиростатов.

В данном параграфе изучается задача о так называемых нормальных движениях исследуемой гидромеханической системы. Формулируются свойства собственных значений и корневых элементов исследуемой задачи.

Постановка задачи о нормальных колебаниях. Будем считать, что на систему сочлененных гиростатов не действует дополнительное поле внешних сил, т.е. $\vec{f}(t, x) \equiv \vec{0}$. Тогда, как следует из (1)—(3), (11), (23)—(25), (32), заданные правые части в возникающих эволюционных уравнениях — тождественно нулевые вектор-функции переменной t, в частности, в первом уравнении (28) $\vec{M}(t) \equiv \vec{0}$ (см. (32)).

Движения такого вида будем называть свободными.

Определение 2. Будем говорить, что решение задачи о свободных движениях системы сочлененных гиростатов являются нормальными колебаниями, если искомые функции зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$, т.е.

$$\vec{\delta}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\delta}_k, \quad \vec{\omega}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3},$$
$$\vec{u}_k(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{u}_k(x), \quad p_k(t,x) = e^{-\lambda t}p_k(x), \quad k = \overline{1,3}. \tag{73}$$

В этих формулах $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее спектральный параметр задачи, а множители при $\exp(-\lambda t)$ — так называемые амплитудные элементы. Отметим еще, что $\mathrm{Re}\ \lambda$ (> 0) дают декремент затухания нормальных колебаний, $\mathrm{Im}\ \lambda \neq 0$ — их частоту.

Рассмотрим нормальные колебания исследуемой гидромеханической системы на основе нескольких возникших эволюционных уравнений. Для задачи (23)—(25), (8) приходим к уравнениям

$$-\lambda C\vec{\omega} + A\vec{\omega} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3, \tag{74}$$

для задачи (28), (31) (а также из (74)) получаем эквивалентную спектральную задачу

$$\lambda^2 C\vec{\delta} - \lambda A\vec{\delta} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}. \tag{75}$$

Простейшие свойства спектра и системы корневых элементов. Свойства собственных значений и корневых элементов задач (74), (75) сформулируем в виде отдельных утверждений.

Свойство 1^0. Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является 3—кратным собственным значением задач (74), (75). Отвечающее ему собственное подпространство $\mathcal{H}_0$ состоит из элементов вида

$$\left(\vec{\omega}, \vec{\delta}\right)^\tau = \left(\vec{0}, \vec{\delta}^3\right)^\tau, \quad \vec{\delta}^3 \in \ker B \neq \vec{0}, \tag{76}$$

где

$$\vec{\delta}^3 = \left(\vec{\delta}_1^3 = \delta_1^3\vec{e}_1^3; \vec{\delta}_2^3; \vec{\delta}_3^3\right)^\tau. \tag{77}$$

Свойство 2^0. Если $\lambda \neq 0$, то задача (74) либо (75) равносильна спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\delta} := \left(A - \lambda C - \lambda^{-1}P_2BP_2\right)\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\delta} \in \mathcal{H}, \tag{78}$$

Собственные значения λ расположены симметрично относительно вещественной оси и по собственным элементам $\vec{\delta}$ находятся по формулам

$$\lambda_\pm = \frac{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_\mathcal{H} \pm \sqrt{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_\mathcal{H}^2 - 4\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_\mathcal{H} \cdot \left(B_1P_2\vec{\delta}, P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1}}}{2\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_\mathcal{H}}; \tag{79}$$

Кроме того, они обладают свойством

$$\mathrm{Re}\ \lambda > 0. \tag{80}$$

Свойство 3^0**.** Невещественные собственные значения λ, а также те вещественные λ (они положительны), которым отвечают, кроме собственных, присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$F := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right), |\lambda| \leqslant \lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right) \right\}, \quad (81)$$

где $\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 0$— минимальное собственное значение оператора $C^{-1/2}AC^{-1/2}$, а $\lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right)$ — максимальное собственное значение задачи

$$B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \lambda C\vec{\delta}, \quad (82)$$

причем

$$\tilde{C}_{11} := C_{11} - C_{10}C_{00}^{-1}C_{01} > 0, \quad C_{ij} := P_iCP_j, \quad i,j = 0,1, \quad (83)$$

где $P_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ и $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$ ортопроекторы на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно (в силу леммы 1 оператор B допускает представление в виде $B = diag\,(B_1; 0)$ в ортогональном разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 = \ker B$, $\dim \mathcal{H}_0 = 3$, $\dim \mathcal{H}_1 = 2 \cdot 3 = 6$, где $\mathcal{H}_0 = \ker B$ — подпространство, натянутое на элементы (45), а $\mathcal{H}_1$ состоит из элементов вида $P_2\vec{\delta} := \left(P_2\vec{\delta}_1; P_2\vec{\delta}_2; P_2\vec{\delta}_3\right)^{\tau}$, т.е. из набора проекций векторов $\vec{\delta}_k$ на плоскости $O_kx_k^1x_k^2$, $k = \overline{1,3}$).

Свойство 4^0**.** Если выполнено условие

$$\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 2\lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right), \quad (84)$$

то задача (75) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов.

Свойство 5^0**.** Задача (74) о нормальных колебаниях трех сочлененных гиростатов имеет $6 \cdot 3 = 18$ собственных значений (с учетом их кратностей). При этом, как уже упоминалось в свойстве 1^0, $\lambda = 0$ — трехкратное собственное значение.

Свойство 6^0**.** Физический смысл нормальных движений, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$, для трех сочлененных гиростатов состоит в следующем: этому λ соответствуют не движения, а новые состояния покоя гидромеханической системы, которые получаются из исходного состояния поворотом гиростатов на произвольные углы $\vec{\delta}_1^3$, $\vec{\delta}_2^3$, $\vec{\delta}_3^3$ соответственно.

Свойство 7^0**.** Если трение в шарнирах отсутствует, то $A = 0$. В этом случае задача (74) принимает вид

$$B\vec{\delta} - \lambda C\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} + \lambda\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H}. \quad (85)$$

Данная задача имеет $2 \cdot 3 = 6$-кратное собственное значение $\lambda_0 = 0$, ему отвечает 3 первых присоединенных элементов соответственно вида

$$\vec{\omega}_0 = \vec{0}, \quad \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3 \in \ker B = \mathcal{H}_0, \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \in \ker B, \quad \vec{\delta}_1 = \vec{0}. \quad (86)$$

Кроме того, задача (85) имеет $2 \cdot 3 = 6$ пар чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i \lambda_k^{1/2} \left(\tilde{C}_{11}^{-1/2} B_{11} \tilde{C}_{11}^{-1/2} \right), \quad k = \overline{1,6}. \tag{87}$$

Свойство 8^0**.** В качестве следствия из свойства 7^0 получаем также утверждение: при достаточно малом трении в шарнирах (коэффициенты $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,3}$, достаточно малы) задача (74) имеет 3-кратное нулевое собственное значение и 3 собственных значения (вероятно, вещественных, а потому положительных) в окрестности нуля. Тогда всего в задаче (74) может быть не более $2 \cdot 3 = 6$ пар комплексно сопряженных собственных значений.

Свойство 9^0**.** Предыдущие свойства решений задачи (74) показывают, что трение в шарнирах играет существенную роль в данной задаче: если оно отсутствует, то спектр расположен на мнимой оси; если оно достаточно велико (выполнено условие (84)), то этот спектр расположен на неотрицательной полуоси; если трение умеренное, то спектр расположен (кроме нулевого собственного значения) в правой комплексной полуплоскости, причем может быть, по-видимому, не более чем $2 \cdot 3 = 6$ пар невещественных комплексно сопряженных собственных значений. Каждой такой паре $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ отвечает декремент затухания $\alpha_0 > 0$ нормального движения гидромеханической системы и частота колебания $\beta_0 > 0$.

Свойство 10^0**.** В качестве еще одного следствия из свойства 7^0 приведем такой факт: в задаче о свободных движениях гидромеханической системы, отвечающей задаче (85) при отсутствии трения в шарнирах, т.е. в задаче

$$C \frac{d\vec{\omega}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega}, \tag{88}$$

возможны тривиальные решения вида

$$\vec{\delta}(t) = \vec{\delta}_0 + t\vec{\omega}_0, \quad \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3, \quad \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_0^3. \tag{89}$$

Они соответствуют произвольному перемещению системы при $t = 0$ на $\vec{\delta}_0 = \left(\vec{\delta}_{0,1}^3; \vec{\delta}_{0,2}^3; \vec{\delta}_{0,3}^3 \right)^{\tau}$, а затем медленному равномерному вращению каждого гиростата с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \left(\vec{\omega}_{0,1}^3; \vec{\omega}_{0,2}^3; \vec{\omega}_{0,3}^3 \right)^{\tau}$.

Свойство 11^0**.** Отметим, наконец, еще одно математическое обстоятельство: система корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи образует базис в пространстве $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 = \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 = \left(\mathbb{C}^5\right)^3 = \mathbb{C}^{15}$.

Индефинитный подход. К исследуемой проблеме нормальных колебаний системы из 3 сочлененных гиростатов можно применить еще один подход, основанный на теории самосопряженных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой (см. например, [8], [9] и [10]). Очень краткие сведения о таких операторах можно также найти в параграфе 1.4 монографии [1].

Проблема нормальных колебаний исследуемой гидромеханической системы сводится к спектральной задаче вида

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} := \left(\vec{\psi};\vec{\psi}_1\right)^{\tau} = \left(C^{1/2}\vec{\omega}; -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)^{\tau}, \tag{90}$$

$$\vec{\psi} \in \mathcal{H}, \quad \vec{\psi}_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \vec{v} \in \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \dim \mathcal{H} = 3n, \quad \dim \mathcal{H}_1 = 2n, \quad n = 3, \tag{91}$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & iP_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Этот оператор является (максимальным) аккретивным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}}$. Однако он обладает еще одним замечательным свойством: он является самосопряженным оператором в пространстве с индефинитной метрикой.

Введем, опираясь на ортогональное разложение $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1$ оператор

$$\mathfrak{J} := \operatorname{diag}(I_{3n}; -I_{2n}), \quad n = 3, \tag{93}$$

где I_{3n} и I_{2n} — единичные операторы в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ соответственно. Очевидно, этот оператор обладает свойствами

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^{-1}, \tag{94}$$

т.е. является канонической симметрией.

Для элементов из $\tilde{\mathcal{H}}$ введем наряду с обычным скалярным произведением

$$(\vec{v},\vec{w})_{\tilde{\mathcal{H}}} := \left(\vec{\psi};\vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} + \left(\vec{\psi}_1;\vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1}, \quad \vec{v} = \left(\vec{\psi};\vec{\psi}_1\right)^{\tau}, \quad \vec{w} = (\vec{\varphi};\vec{\varphi}_1)^{\tau}, \tag{95}$$

так называемое индефинитное скалярное произведение

$$[\vec{v},\vec{w}] := \left(\vec{\psi};\vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} - \left(\vec{\psi}_1;\vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1} = (\mathfrak{J}\vec{v},\vec{w})_{\tilde{\mathcal{H}}}. \tag{96}$$

Соответствующее пространство с индефининой метрикой обозначим (по аналогии с пространством Л.С. Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$) символом $\tilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$, где, согласно (93), $\varkappa = 2n$, т.е. количеству отрицательных квадратов в квадратичной форме

$$[\vec{v},\vec{v}] := ||\vec{\psi}||^2_{\mathcal{H}} - ||\vec{\varphi}_1||^2_{\mathcal{H}_1} = (\mathfrak{J}\vec{v},\vec{v})_{\tilde{\mathcal{H}}}, \quad dim\mathcal{H}_1 = 2n, \quad n = 3. \tag{97}$$

Заметим теперь, что

$$\mathfrak{J}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{3n} & 0 \\ 0 & -I_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ -iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{J}\mathcal{A})^*, \tag{98}$$

т.е. действительно является оператором, самосопряженным в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$ с индефинитной метрикой (97). Это важное обстоятельство, а также конечномерность пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$, $\dim \tilde{\mathcal{H}}_{\varkappa} = 5n$, позволяет сразу установить свойства решений спектральной задачи (90), а потому и связанных с ней задач (75) и (74).

Теорема 6. *Спектр задачи* (74) *(либо* (75)*) о нормальных колебаниях системы* $n = 3$ *сочлененных гиростатов может иметь при наличии трения в шарнирах и* $A >> 0$ *не более* $2\varkappa = 4n = 4 \cdot 3 = 12$ *невещественных (комплексно сопряженных) собственных значений. Остальные* $6n - 4n = 2n = 2 \cdot 3 = 6$ *собственных значений вещественны (неотрицательны) и обладают следующими свойствами:* $\lambda = \lambda_0 = 0$ *является* $n = 3$*-кратным собственным значением и ему не отвечают присоединенные элементы, остальные* $n = 3$ *собственных значений положительны и им также не отвечают присоединенные элементы.*

Если выполнено условие (84)*, то все собственные значения задачи* (74) *вещественны (и неотрицательны), а собственные элементы спектральной задачи* (90), (91) *образуют* $\mathfrak{J}$*-ортогональный базис в пространстве* $\tilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$*, причем отвечающие элементам этого базиса собственные значения положительны.*

Список литературы

[1] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М., 1989.

[2] *Батыр Э.И.* Малые движения двойного маятника с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость. — //Ученые записки ТНУ.— Симферополь, 2001. — Том 14(53), №1 — С. 18–23.

[3] *Батыр Э.И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость. — //Ученые записки ТНУ.— Симферополь, 2002. — Том 15(54), №2 — С. 5–10.

[4] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

[5] *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.52–73.

[6] *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.73–82.

[7] *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избр. соч.— Т. 1. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31 – 152.

[8] *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.

[9] *Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H.* Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. Akademic. Verlag, Berlin, 1982.

[10] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

Малі рухи і нормальні коливання системи трьох зчленованих тіл з порожнинами, що заповнені ідеальною нестисливою рідиною.batyr

У роботі досліджується початково-краєва та спектральна задачі про малі коливання системи з трьох тіл. Система являє собою ланцюг послідовно з'єднанних твердих тіл. Кожне тіло такого ланцюга є гіростат. Формулюється теорема існування розв'язків задачі Коші; описуються властивості нормальних коливань; відома теорема Н.Є. Жуковського переноситься на випадок руху системи трьох тіл.

Ключові слова: система трьох зчленованих гіростатів, ідеальна нестислива рідина.

Батуг, Е.I. Small movements and normal oscillations of a system of three connected bodies with the cavities, filled by an ideal incompressible fluid.batyr

In this paper we considered an initial-boundary value and spectral problems about the small movements of a system of three bodies. The system is a circuit of the consistently connected hard bodies. Each of the bodies of such circuit is a gyrostat. The existence theorem of solutions of the Cauchy problem is formulated. The properties of normal oscillations are described. The known N.E. Zhukovsky's theorem is transferred on a case of a movement of three bodies.

Keywords: system of three connected gyrostats, ideal incompressible fluid.