О. А. Дудик

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ УСЛОВИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В данной работе подробно рассматривается случай, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и оператор потенциальной энергии имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Приводится доказательство обращения теоремы Лагранжа об устойчивости.

1. ПОСТАНОВКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ.

Малые движения плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, описываются эволюционным уравнением (см. [1])

$$\mathcal{A} \frac{dx}{dt} + \mathcal{B}x = f(t), \quad x(0) = x^0, \quad x = (\vec{v}; \vec{z}; \vec{w}; \zeta; \delta)^t. \quad (1)$$

Операторные матрицы в задаче (1) имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{11} & \nu^{-1} \rho R^* & I_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{21} \nu^{-1} R^* & I_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \rho \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ RA & \nu^{-1} B & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & B_{34} & mgl \\ -\gamma_n & -\nu^{-1} \gamma_n R^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$I_{11} \vec{v} = \rho \vec{v}, \quad I_{12} \vec{w} = \rho P_{0,S} (\vec{w} \times \vec{r}), \quad (3)$$

$$I_{21} \vec{v} = \rho \int_{\Omega} (\vec{r} \times \vec{v}) d\Omega, \quad I_{22} \vec{w} = J \vec{w}$$

$$B_{23} \vec{w} = \rho g B^{-1/2} P Q^* (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3), \quad (4)$$

$$B_{34} \zeta = -\rho g \int_{\Gamma} (\vec{e}_3 \times \vec{r}) \zeta d\Gamma,$$

$$B := Q^* B_\sigma Q : D(B) \subset \overrightarrow{M_0}(\Omega) \rightarrow \overrightarrow{M_0}(\Omega); Q^* := A^{-1/2} V, Q := \gamma_n A^{-1/2}, \quad (5)$$

$$R := B^{1/2} P A^{-1/2} : \overrightarrow{\mathcal{J}}_{o,s}(\Omega) \rightarrow \overrightarrow{M_0}(\Omega); \quad (6)$$

$$R^+ := A^{-1/2} P B^{1/2}, \quad D(R^+) := D(B^{1/2}) \subset \overrightarrow{M_0}(\Omega), \quad (7)$$

$$\overline{R^*} := R^* \in \sigma_\infty(\overrightarrow{M_0}(\Omega)). \quad (8)$$

Здесь $\rho > 0$ — плотность жидкости, $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $J > 0$ — компонента тензора инерции системы относительно оси Ox_1 , m — масса всей системы, $l > 0$ — расстояние от O до центра масс C всей системы, $\alpha > 0$ — коэффициент трения на оси, $\vec{w}(t)$ — угловая скорость маятника.

Отметим (см. [1]), что оператор $\mathcal{A}$ является обратимым и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + R_1, \quad \mathcal{A}_0 = \text{diag}(\rho I; \rho I; J; I; I), R_1 \in \sigma_\infty. \quad (9)$$

Заметим также, что оператор $\mathcal{B}$ можно представить в виде:

$$\mathcal{B} = (I + R_2)\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_0 = \text{diag}(\rho\nu A; \nu^{-1}B; \alpha; I; I), R_2 \in \sigma_\infty, \quad (10)$$

где $\mathcal{B}_1$ - ограниченный оператор.

Рассмотрим нормальные движения системы, то есть решения задачи (1) при $f(t, x) \equiv 0$, зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$ (см. [2]). Приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{B}x = \lambda \mathcal{A}x, \quad (11)$$

которая равносильна системе уравнений

$$\rho\nu A\vec{v} = \lambda \left(\rho\vec{v} + \frac{1}{\nu}\rho R^* \vec{z} + I_{12}\vec{w} \right), \quad (12)$$

$$R A\vec{v} + \nu^{-1} B\vec{z} + B_{23}\vec{w} = \lambda \rho \vec{z}, \quad (13)$$

$$\alpha\vec{w} + B_{34}\zeta + mgl\vec{\delta} = \lambda (I_{21}\vec{v} + \nu^{-1} I_{21} R^* \vec{z} + J\vec{w}), \quad (14)$$

$$-\gamma_n \vec{v} - \frac{1}{\nu} \gamma_n R^+ \vec{z} = \lambda \zeta, \quad (15)$$

$$-\vec{w} = \lambda \vec{\delta}. \quad (16)$$

Полагая $\lambda \neq 0$, можно исключить из (12) - (16) отклонение ζ и угловое перемещение $\vec{\delta}$. С учетом того, что

$$\zeta = -\frac{1}{\lambda}\gamma_n \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}\rho R^+ \vec{z} \right), \quad v \in D(A), \quad \vec{z} \in D(B). \quad (17)$$

$$\vec{\delta} = -\frac{1}{\lambda}\vec{w}, \quad (18)$$

получим

$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} \left(\rho \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu} R^+ \vec{z} \right) + I_{12} \vec{w} \right), \quad (19)$$

$$B^{1/2} A^{1/2} \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu} R^+ \vec{z} \right) + B_{23} \vec{w} = \lambda \rho \vec{z}, \quad (20)$$

$$\alpha \vec{w} - \frac{1}{\lambda} B_{34} \gamma_n \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu} R^+ \vec{z} \right) - \frac{1}{\lambda} mgl \vec{w} = \lambda \left(I_{21} \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu} R^+ \vec{z} \right) + J \vec{w} \right). \quad (21)$$

Вводя замену

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{\nu} R^+ \vec{z}, \quad (22)$$

имеем

$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho \vec{u} + I_{12} \vec{w}), \quad (23)$$

$$B^{1/2} A^{1/2} \vec{u} + B_{23} \vec{w} = \lambda \rho \vec{z}, \quad (24)$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\lambda} mgl \right) \vec{w} - \frac{1}{\lambda} B_{34} = \lambda (I_{21} \vec{u} + J \vec{w}), \quad (25)$$

Из (4)-(25) следует, что

$$\vec{z} = \frac{1}{\lambda\rho} \left(B^{1/2} A^{1/2} \vec{u} + B_{23} \vec{w} \right) = \frac{1}{\lambda\rho} \left(B^{1/2} A^{1/2} \vec{u} + \rho g B^{-1/2} Q^* (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3) \right). \quad (26)$$

Подставим (23),(26) в (22), учитывая свойства операторов (5), (7) (см. [1], [3]), тогда

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + \frac{1}{\rho\nu\lambda} \left(R^+ B^{1/2} A^{1/2} \vec{u} + \right. \\
 &+ \left. \rho g R^+ B^{-1/2} Q^* (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3) \right) = \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + \\
 &+ \frac{1}{\rho\nu\lambda} \left(A^{-1/2} B A^{1/2} \vec{u} + \rho g A^{-1/2} Q^* (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3) \right) = \\
 &= \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + \frac{1}{\rho\nu\lambda} \left(A^{-1/2} B A^{1/2} \vec{u} + \rho g V (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3) \right) = \\
 &= \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + \frac{1}{\rho\nu\lambda} (V B_\sigma \gamma_n \vec{u} + \rho g V (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3)) = \\
 &= \frac{\lambda}{\rho\nu} A^{-1} (\rho\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + \frac{1}{\rho\nu\lambda} (A^{-1} G B_\sigma \gamma_n \vec{u} + \rho g V (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3)).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, система уравнений (12) - (16) принимает вид

$$\begin{cases} \vec{u} = (\lambda/\rho\nu) A^{-1} (I_{11}\vec{u} + I_{12}\vec{w}) + (1/\rho\nu\lambda) A^{-1} (B_{11}\vec{u} + B_{12}\vec{w}), \\ \alpha\vec{w} = \lambda (I_{21}\vec{u} + I_{22}\vec{w}) + \lambda^{-1} (B_{21}\vec{u} + B_{22}\vec{w}), \end{cases} \tag{28}$$

здесь

$$B_{11}\vec{u} = G B_\sigma \gamma_n \vec{u}, \quad B_{12}\vec{w} = \rho g V (\theta (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3), \tag{29}$$

$$B_{21}\vec{u} = B_{34} \gamma_n \vec{u}, \quad B_{22}\vec{w} = m g l \vec{w}, \tag{30}$$

I_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) определены в (3).

Запишем систему уравнений (28), (29) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \rho\nu\vec{u} \\ \alpha\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \left\{ \lambda \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \right\}. \tag{31}$$

или

$$I_0 y = \lambda \tilde{A}^{-1} \tilde{I} y + \frac{1}{\lambda} \tilde{A}^{-1} \tilde{B} y, \quad y = (\vec{u}, \vec{w})^t. \tag{32}$$

Осуществляя замену

$$y = \tilde{A}^{-1/2} z \tag{33}$$

и действуя слева оператором $\tilde{A}^{1/2}$ на обе части уравнения (32), получим

$$\lambda^2 \tilde{A}^{-1/2} \tilde{I} \tilde{A}^{-1/2} z + \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B} \tilde{A}^{-1/2} z = \lambda \tilde{A}^{1/2} I_0 \tilde{A}^{-1/2} z. \tag{34}$$

Отсюда следует, что задача (11) равносильна спектральной задаче для квадратичного пучка

$$\left(\lambda^2 \widehat{\mathcal{A}}^{-1} - \lambda \widehat{I} + \widehat{\mathcal{B}}\right) z = 0, \quad z \in \widehat{H}, \quad (35)$$

где

$\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$ - компактная операторная матрица;

$\widehat{I}$ - ограниченная положительно определенная операторная матрица;

$\widehat{\mathcal{B}}$ - неограниченная самосопряженная операторная матрица.

2. ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ.

Покажем, что если квадратичная форма $\left(\widehat{\mathcal{B}}z, z\right)_{\widehat{H}}$ потенциальной энергии принимает отрицательные значения, то имеет место обращение теоремы Лагранжа об устойчивости (см. [2], [3]).

Теорема 1. *Если оператор потенциальной энергии $\widehat{\mathcal{B}}$ имеет ровно $\varkappa$ (с учетом кратностей) отрицательных собственных значений, то задача (35) имеет также ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, которые расположены в левой комплексной полуплоскости.*

Доказательство проведем по этапам.

1. Введем в (35) новый спектральный параметр

$$\eta = -\lambda \quad (36)$$

и рассмотрим при $\eta > 0$ оператор

$$D(\eta) := \eta^2 \widehat{\mathcal{A}}^{-1} + \eta \widehat{I}. \quad (37)$$

Отметим важные свойства этого оператора: при любом $\eta > 0$ оператор $D(\eta)$ ограничен и положительно определен в $\widehat{H}$.

Доказательство того, что $D(\eta) \gg 0$, следует из свойств операторов $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$, $\widehat{I}$ и того, что $\eta > 0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$D(\eta)\vec{z} = -\widehat{\mathcal{B}}\vec{z}. \quad (38)$$

Если это уравнение имеет при некотором $\eta > 0$ нетривиальное решение, то задача (35) будет иметь нетривиальное решение $\lambda = -\eta < 0$, то есть будет установлено утверждение теоремы.

2. Обобщая задачу (38), рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\widehat{\mathcal{B}}\vec{z} = -\beta D(\eta)\vec{z}, \quad (39)$$

где $\beta = \beta(\eta)$ —новый спектральный параметр.

С учетом того, что $\widehat{B} = \text{diag}(B_+; 0; -B_-)$ ($B_{\pm} > 0$), запишем (39) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} -B_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

или

$$\begin{cases} -B_+ z_1 = \beta (D_{11} z_1 + D_{12} z_2 + D_{13} z_3), \\ 0 = \beta (D_{21} z_1 + D_{22} z_2 + D_{23} z_3), \\ B_- z_3 = \beta (D_{31} z_1 + D_{32} z_2 + D_{33} z_3). \end{cases} \quad (41)$$

Так как $D \gg 0$, то $D_{ii} \gg 0$ и, следовательно, $D_{22} \gg 0$, то существует ограниченный оператор D_{22}^{-1} .

Рассматривая систему (41) при $\beta = 0$, получаем тривиальное решение. Далее полагаем $\beta \neq 0$.

Тогда

$$z_2 = -D_{22}^{-1} (D_{21} z_1 + D_{23} z_3). \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41), получим

$$\begin{pmatrix} -B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{11} & \widetilde{D}_{13} \\ \widetilde{D}_{31} & \widetilde{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Здесь

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{11} & \widetilde{D}_{13} \\ \widetilde{D}_{31} & \widetilde{D}_{33} \end{pmatrix} \gg 0.$$

Вводя замену

$$B_+^{1/2} \varphi_1 = \psi_1, \quad (44)$$

$$B_-^{1/2} \varphi_3 = \psi_3, \quad (45)$$

приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} B_+^{-1/2} \widetilde{D}_{11} B_+^{-1/2} \psi_1 + B_+^{-1/2} \widetilde{D}_{13} B_-^{-1/2} \psi_3 \\ B_-^{-1/2} \widetilde{D}_{31} B_+^{-1/2} \psi_1 + B_-^{-1/2} \widetilde{D}_{33} B_-^{-1/2} \psi_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

или

$$\psi = \beta \mathcal{J} \widehat{B}_0 \psi, \quad 0 < \widehat{B}_0 = \widehat{B}_0^* \in \sigma_{\infty}, \quad (47)$$

которая имеет ровно $\aleph$ (с учетом кратностей) положительных собственных значений (см. [2], пар.1.5).

3. Преобразуем уравнение (39), используя свойство $D(\eta) \gg 0$ ($\eta > 0$). Из этого свойства следует, в частности, что существует ограниченный обратный оператор $D^{-1}(\eta) > 0$. Поэтому, осуществляя в (39) замену

$$D^{1/2}(\eta)\vec{z} = \vec{\xi} \quad (48)$$

и применяя $D^{-1/2}(\eta)$ к обеим частям полученного уравнения, приходим к задаче на собственные значения

$$K(\eta)\vec{\xi} := D^{-1/2}(\eta)(-\widehat{B})D^{-1/2}(\eta)\vec{\xi} = \beta\vec{\xi}. \quad (49)$$

Для установления существования ровно k отрицательных собственных значений в задаче (35) воспользуемся максиминимальным принципом, а также тем обстоятельством, что в уравнении вида (49) не сам оператор $K(\eta)$, а лишь его положительная часть $K_+(\eta)$ является k -мерным (ограниченным, поэтому и компактным) оператором.

Имеем

$$\begin{aligned} \beta_{+,k}(\eta) &= \max \min \left(D^{-1/2}(\eta)(-\widehat{B})D^{-1/2}(\eta)\vec{\xi}, \vec{\xi} \right)_{\widehat{H}} / (\vec{\xi}, \vec{\xi})_{\widehat{H}} = \\ &= \max \min \left(-\widehat{B}\vec{z}, \vec{z} \right)_{\widehat{H}} / (D(\eta)\vec{z}, \vec{z})_{\widehat{H}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Если при некотором $\eta > 0$ окажется, что $\beta_+(\eta) = 1$, то уравнение (38) будет иметь нетривиальное решение, и теорема будет доказана.

4. Заметим, что справедливы неравенства

$$\varphi_-(\eta) \left(\widehat{A}^{-1} + \widehat{I} \right) \leq D(\eta) \leq \varphi_+(\eta) \left(\widehat{A}^{-1} + \widehat{I} \right), \quad (51)$$

$$\varphi_-(\eta) := \min_{\eta > 0} \{ \eta; \eta^2 \}, \quad \varphi_+(\eta) := \max_{\eta > 0} \{ \eta; \eta^2 \}.$$

Отсюда и из (50) получаем, что

$$\frac{\gamma_{+,k}}{\varphi_+(\eta)} \leq \beta_{+,k}(\eta) \leq \frac{\gamma_{+,k}}{\varphi_-(\eta)}, \quad (52)$$

где $\gamma_{+,k}$ - собственные значения задачи

$$-\widehat{B}\vec{z} = \gamma \left(\widehat{A}^{-1} + \widehat{I} \right) \vec{z}. \quad (53)$$

5. Опираясь на оценки (52), уравнение (38) решим графически, построив графики функций

$$\gamma_{+,k}/\varphi_+(\eta), \quad \gamma_{+,k}/\varphi_-(\eta),$$

а также единичной функции. Так как функции $\varphi_{\pm}(\eta)$ непрерывны и монотонно возрастают, то найдутся такие η_1 и η_2 , что

$$\gamma_{+,k}/\varphi_+(\eta_1) = 1, \quad \gamma_{+,k}/\varphi_-(\eta_2) = 1, \quad 0 < \eta_1 \leq \eta_2.$$

В силу (52) и непрерывной зависимости $\beta_+(\eta)$ от параметра η на промежутке $[\eta_1, \eta_2]$ найдется такое η_0 , что $\beta(\eta_0) = 1$. Тогда число $\lambda = \lambda_0 = -\eta_0 < 0$ дает нетривиальное решение уравнения (38). $\square$

Вывод. Таким образом, в данной работе рассмотрена ситуация, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и нижняя грань оператора B_σ отрицательна. Так как оператор B_σ имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой на бесконечности (см. [1], лемма 1.), то рассматривался общий случай, когда оператор B_σ имеет $\varkappa$ (с учетом их кратности) отрицательных собственных значений и q - кратное нулевое собственное значение:

$$\begin{aligned} \lambda_1(B_\sigma) \leq \dots \leq \lambda_\varkappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(B_\sigma) = \dots = \lambda_{\varkappa+q}(B_\sigma) < \\ < \lambda_{\varkappa+q+1}(B_\sigma) \leq \dots \end{aligned} \quad (54)$$

В частности, если интенсивность гравитационного поля изменяет знак и модуль, то минимальное собственное значение оператора B_σ , совпадающее с его нижней гранью, может стать отрицательным, и тогда выполняются условия (54) с $\varkappa \geq 1$, $q \geq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дудик О.А. Малые колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. ISSN 1683 - 4720. Труды ИПММ НАН Украины 2007. Вып. 14.
- [2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989 г, - 416 с.
- [3] Копачевский Н.Д. К проблеме малых движений и нормальных колебаний капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся сосуде. // Современная математика. Фундаментальные направления, 2007 г. (в печати).