Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 13–20.

Т. Я. Азизов, В. А. Хацкевич

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОПЕРАТОРНОГО ШАРА РАДИУСА 1

Введение и постановка задач

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$, соответственно. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \qquad (x,y) = (x_1,y_1)_1 + (x_2,y_2)_2, \tag{0.1}$$

где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_j, y_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1,2$.

Для гильбертовых пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ через $L(\mathcal{F},\mathcal{G})$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, определенных на $\mathcal{F}$ и действующих в $\mathcal{G}$. Если пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ совпадают: $\mathcal{F} = \mathcal{G} =: \mathcal{H}$, то множество линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ будем обозначать $L(\mathcal{H})$.

Четверка операторов $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i,\mathcal{H}_j)$, $i,j = 1,2$, определяет матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

оператор $A \in L(\mathcal{H})$, и обратно, по оператору $A \in L(\mathcal{H})$ однозначно определяются компоненты $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i,\mathcal{H}_j)$, $i,j = 1,2$, матрицы (0.2).

Обозначим через $\mathfrak{K}$ замкнутый шар в $L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ радиуса 1:

$$\mathfrak{K} = \{K \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \mid \|K\| \le 1\},$$

и через $\mathfrak{K}^\circ$ его внутренность:

$$\mathfrak{K}^\circ = \{K \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \mid \|K\| < 1\}.$$

Пусть оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ задан матрицей (0.2). Формулой

$$F_A(X) = (A_{21} + A_{22}X)(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \tag{0.3}$$

зададим *дробно-линейное отображение* (д.л.о.) $F_A : L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \to L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Область определения этого отображения $\operatorname{dom} F_A$ совпадает со множеством операторов $X \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых $(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, а потому может оказаться и пустой. Заметим, что $\operatorname{dom} F_A \neq \emptyset$, если $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$ (в этом случае $X = 0 \in \operatorname{dom} F_A$). Нас будет интересовать случай $\operatorname{dom} F_A \supset \mathfrak{K}$, а это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1. \tag{0.4}$$

При выполнении условия (0.4) $\operatorname{dom} F_A$ содержит открытый шар $\mathfrak{K}_R^\circ \subset L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ с центром в нуле и радиуса $R = (\|A_{11}^{-1}A_{12}\|)^{-1}$.

Если

$$\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_A, \qquad F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}, \tag{0.5}$$

будем называть F_A *дробно-линейным преобразованием* (д.л.п.) шара $\mathfrak{K}$. При выполнении условий (0.5) возможны варианты:

[1]Исследование Т.Я. Азизова поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а

(a) $F_A(K) = \text{const}$ для всех $K \in \mathfrak{K}$,

(b) $F_A(K) \neq \text{const}$

Прямо проверяется, что случай (a) имеет место тогда и только тогда, когда оператор $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, $\Gamma := A_{21}A_{11}^{-1}$ — сжатие, $A_{11}^{-1}A_{12}$ — равномерное сжатие и $A_{22} = \Gamma A_{12}$.

Пусть выполнено (b). В этом случае, как показано в [22], д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда A — бистрогий плюс-оператор в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ относительно индефинитной J-метрики $[x, y] = (Jx, y)$, где J задается относительно (0.1) матрицей

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Известно, что для бистрогого плюс-оператора A наряду с (0.5) имеет место включение:

$$F_A(\mathfrak{K}^\circ) \subset \mathfrak{K}^\circ. \tag{0.6}$$

Таким образом, описание д.л.п. шара $\mathfrak{K}$, образ которого состоит из одного оператора, не представляет труда, и потому далее будем полагать, что выполнено условие (b) или, чуть более общо, оператор A является бистрогим плюс-оператором.

В последнее время опубликована серия работ в различных областях математики, в которой используются д.л.о. и д.л.п. F_A как общего вида (0.3), так и их частные случаи, когда $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$ или $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$, и часто даже в простейшем случае $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, где через $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел. Так, например, д.л.о. и д.л.п. применялись в [17], [19], [20], [9] к изучению дихотомии, согласованной с сигнатурой пространства Крейна, дифференциальных и разностных уравнений специальных классов; в [24], [10] — к изучению генераторов однопараметрических полугрупп, в [6], [7], [11], [12], [13], [14], [16] — к проблеме Кёнигса и связанным с ней уравнениям Абеля–Шредера, в [2], [6], [23], [8], [5] — к изучению операторов композиции на функциональных пространствах, и т.д.

Остановимся подробнее на некоторых приложениях. Напомним, что проблема Кёнигса заключается во вложении заданной дискретной полугруппы G итераций д.л.п. F_A в непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.п. $F_{A(t)}$, $t > 0$, причем так, чтобы для $F_{A(t)}$, $t > 0$, были выполнены условия (0.5) и (0.6). Применяя различные методы, в том числе, уравнения Абеля–Шредера, удается построить непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.о. $F_{A(t)}$, содержащую G. При этом ключевым является установление условий (0.5) и (0.6), т.е. условий, при которых д.л.о. $F_{A(t)}$ является д.л.п..

В теории операторов композиции рассматриваются операторы C_{F_A} вида

$$C_{F_A} = f \circ F_A, \tag{0.7}$$

где F_A — д.л.п., а функции f голоморфны на $\mathfrak{K}^\circ$ и принадлежат пространствам Харди, Бергмана, Дирихле и др. Изучаются условия непрерывности, норма, спектр, сопряженный оператор $C^*_{F_A}$. При изучении $C^*_{F_A}$ часто удается показать, что

$$C^*_{F_A} = C_{F_B}, \tag{0.8}$$

где F_B — некоторое д.л.о. шара $\mathfrak{K}^\circ$. И снова ключевым является установление включения (0.6). Таким образом, насущной является задача отыскания условий в терминах элементов A_{ij}, $i, j = 1, 2$, матрицы A вида (0.2), при которых д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$. Впервые это было сделано в [3], где дано параметрическое описание всех J-бинесжимающих операторов и сразу для случая бесконечномерных $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

1. Описание д.л.п.

Доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть д.л.о. F_A порождено оператором A, в матричном представлении* (0.2) *которого оператор A_{11} непрерывно обратим на всем $\mathcal{H}_1$ и выполнено условие* (0.4)*:*

$$\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1. \tag{0.4}$$

Тогда

(*i*) *из неравенства:*

$$\begin{aligned}
&\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\| \\
&\qquad + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^*A_{11}^{*\,-1}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1/2}\| \\
&\qquad \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^{-1}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

следует, что F_A *является д.л.п. шара* $\mathfrak{K}$, *т.е. имеет место включение* (0.5)*:*

$$F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K};$$

(*ii*) *из условия* (0.5)*, следует неравенство:*

$$\begin{aligned}
&\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^2 \\
&\qquad + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^*{A_{11}^*}^{-1}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1/2}\|^2 \\
&\qquad \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{1/2}\|^2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Простым следствием этой теоремы является следующий сравнительно недавно опубликованный результат.

Следствие 1 ([23])**.** *Пусть в условиях Теоремы 1* $\dim H_1 = \dim H_2 = 1$, $A_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$. *Тогда* F_A *удовлетворяет условию* (0.5) *тогда и только тогда, когда*

$$|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| + |\bar{a}_{11}a_{21} - \bar{a}_{12}a_{22}| \le |a_{11}|^2 - |a_{12}|^2. \tag{1.3}$$

Показано, что исследуемую проблему — проблему описания д.л.п. — достаточно (и необходимо) изучить для операторов нижне треугольного вида (см. ниже Следствие 3). В этом направлении основными являются следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 2. *Пусть* A *— нижний треугольный оператор,* A_1 *коллинеарен изометрическому оператору* V, *т.е.* $A_1 = \|A_1\|V$. *Тогда для того, чтобы* A *был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_1\| \ge \sup_{\|x\|=1} \{\|A_{21}^*x\| + \|A_2^*x\|\}. \tag{1.4}$$

Следствие 2. *Пусть* A *— нижний треугольный оператор с непрерывно обратимым* (*на своей области значений*) *оператором* A_1. *Требование*

$$\|A_1^{-1}\|^{-1} \ge \|A_{21}\| + \|A_2\| \tag{1.5}$$

является достаточным для того, чтобы A *был строгим плюс-оператором.*

Теорема 3. *Пусть* A *— нижний треугольный оператор,* A_2 *коллинеарен коизометрическому оператору* W, *т.е.* $A_2 = \|A_2\|W$. *Тогда для того, чтобы* A *был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_2\| \le \inf_{\|x\|=1} \{\|A_1x\| - \|A_{21}x\|\}. \tag{1.6}$$

□

2. Факторизация д.л.о., приложения

$A \in L(\mathcal{H})$ называется *плюс-оператором*, если

$$[Ax, Ax] \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{H} \,:\, [x, x] \geq 0.$$

Известно [21], что оператор A является плюс-оператором тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $\mu \geq 0$, что

$$[Ax, Ax] \geq \mu[x, x] \quad \text{для всех } x \in \mathcal{H}; \tag{2.1}$$

в качестве μ, как правило, берется $\mu(A) = \inf_{[x,x]=1}[Ax, Ax]$. Если $\mu(A) = 0$, то плюс-оператор A называется нестрогим, в противном случае ($\mu(A) > 0$) — строгим.

Всякому плюс-оператору A отвечает отношение G_A, определенное на шаре $\mathfrak{K}$:

$$G_A(K) = \{K' \in \mathfrak{K} \mid A_{21} + A_{22}K = K'(A_{11} + A_{21}K)\}.$$

При этом, если A — нестрогий плюс-оператор, то G_A — постоянное отношение в том смысле, что найдется такой $\widetilde{K} \in \mathfrak{K}$, что $\widetilde{K} \in G_A(K)$ при всех $K \in \mathfrak{K}$.

Теорема 4. *Пусть* $T \in L(\mathcal{H})$,

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}.$$

Следующие условия эквивалентны:

(a) $T_{12} = -T_{11}\Gamma^*$ *при некотором* $\Gamma \in \mathfrak{K}^\circ$*;*

(b) $T = B\Gamma$*, где* B *— нижний треугольный оператор, т.е.* $B_{12} = 0$*, а* $U(\Gamma)$ *—* J*-унитарный оператор вида*

$$\begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

В случае, когда $T = A$ — плюс-оператор, удовлетворяющий условию (a) Теоремы 4, B — также плюс-оператор, и отношение G_A допускает факторизацию

$$G_A = G_B \circ F_{U(\Gamma)},$$

где $F_{U(\Gamma)}$ — д.л.п. $\mathfrak{K}$, определенное по оператору $U(\Gamma)$.

Как отмечалось во Введении, в случае бистрогого плюс-оператора A условие (a) выполнено всегда как для A, так и для A^*. Поэтому справедливо следующее следствие.

Следствие 3. *Пусть A — бистрогий плюс-оператор. Тогда наряду с (b) имеет место факторизация*

(c) $A = U(\Gamma)C$*, где* C *— верхний треугольный оператор, т.е.* $C_{21} = 0$*,*

а также

(d) $F_A = F_B \circ F_{U(\Gamma)}$, $F_A = F_{U(\Gamma)} \circ F_C$

Теорема 4 и Следствие 3 доказывают утверждение, сделанное после Следствия 1, о том, что описание д.л.п. сводится к описанию аффинных д.л.п. Но сфера их применения гораздо шире. В [18] рассматриваются плюс-операторы A со свойством

$$D(A) := A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0.$$

Для таких операторов, используя тонкие методы функционального анализа, авторы установили выпуклость и замкнутость образов отношений G_A. Теперь эти результаты становятся прямым следствием Теоремы 4 и следующего предложения.

Теорема 5. *Строгий плюс-оператор удовлетворяет условию* (a) *Теоремы 4 точно тогда, когда* $D(A) \geq 0$.

Следует отметить, что впервые вопрос о выпуклости и замкнутости образа д.л.п. $F_A : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ для J-бинесжимающего оператора A был решен совершенно другими методами в [4].

Известно [16], что все операторы A, порождающие одно и то же д.л.п. F_A, коллинеарны. Поэтому в силу (2.1) можно считать A J-бинесжимающим:

$$[Ax, Ax] \geq [x, x] \quad \text{и} \quad [A^*x, A^*x] \geq [x, x], \quad x \in \mathcal{H}.$$

Теорема 6. *Нижний треугольный оператор A:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$$

является J-несжимающим точно тогда, когда оператор A_1 непрерывно обратим на своем образе $\operatorname{ran} A_1$, *операторы A_1^{-1} и A_2 — сжатия на* $\operatorname{ran} A_1$ *и* $\mathcal{H}_2$, *соответственно, и существует такое сжатие $S_{21} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, что*

$$A_{21} = (I - A_2A_2^*)^{1/2} S_{21} (A_1^*A_1 - I)^{1/2}.$$

Аналогичная теорема имеет место для верхнего треугольного J-бинесжимающего оператора. Отсюда получается результат, усиливающий соответствующие утверждения из [15].

Следствие 4. *Пусть A — треугольный J-бинесжимающий оператор, у которого один из диагональных элементов унитарен, а спектр второго не разделяет* 0 *и* ∞. *Тогда F_A обладает свойством Кёнигса.*

Отметим также, что Теорема 4 и Следствие 3 нашли свое применение при исследовании вопроса о существовании у J-бинесжимающего оператора максимального неотрицательного инвариантного подпространства. Однако, это тема нашей следующей работы.

В заключение отметим, что описанное выше — содержание доклада на Крымской Осенней Математической Школе (2007). За подробностями мы отсылаем читателя к статье [1], где можно найти как доказательства большей части обозначенных результатов, так и ряда новых.

Список литературы

[1] Азизов Т.Я., Хацкевич В.А. *Бистрогие плюс-операторы и операторные дробно-линейные преобразования*// Український математичний вiсник – 2007. – V.4, N.3.– с. 311-322.

[2] D. Alpay and V. Khatskevich *Linear fractional transformations: basic properties, applications to spaces of analytic functions and Schroeder's equation*// Int. J. Appl. Math. – **2** 2000. – V.2, N.4. – c.459–476.

[3] Азизов Т.Я. *О расширениях инвариантных дуальных пар*// Укр. матем. ж. – 1989. – V.41, N.7. – с. 958–961.

[4] T. Ando *Linear operators on Krein spaces*// Sapporo, Japan – 1979.

[5] C.C. Cowen *Linear fractional composition operators on H^2*// Integral Equations Operator Theory – 1988. – V.11. – с. 151–160.

[6] C. C. Cowen and B. D. MacCluer *Linear fractional maps of the ball and their composition operators* // Acta Sci. Math. (Szeged) – 2000. – V.66, N.1-2. – c.351–376.

[7] C. C. Cowen and B. D. MacCluer *Schroeder's equation in several variables*// Taiwanese J. Math. – – 2003. – V.7, N.1, – c.129–154.

[8] E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez *Adjonts of linear fractional composition operators on the Dirichlet space*// Math. Ann. – 2003. – V.327. – c. 117–134.

[9] V. Khatskevich, I. Karelin, L. Zelenko *Operator pencils of the second order and linear fractional relations*// Ukrainskii matem. visnyk – 2006 – V.3, N.4. – c.467–503.

[10] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *One-parameter semigroups of fractional-linear transformations*// Operator theory, system theory and related topics (Beer-Sheva/Rehovot, 1997). Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel. – 2001. V. 123. – c. 401–411

[11] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *Schröder's functional equation and the Koenigs embedding property* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications – 2001. – V.47. – c.3977-3988.

[12] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *Abel-Schröder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem*// Acta Sci. Math. (Szeged) – 2003. – V.69. – c. 67–98.

[13] В. Хацкевич, В. Сендеров *Уравнение Абеля-Шредера для дробно-линейных преобразований операторных шаров*// Доклады РАН — 2001. – V. 379, N. 4. – с. 455–458.

[14] V. Khatskevich and V. Senderov *Abel-Schröder type equations for maps of operator balls*// Functional Differential Equations – 2003. V.10. – c.239–258.

[15] В. Хацкевич, В. Сендеров *Дробно-линейные преобразования и проблема вложения Кёнигса*// Доклады РАН — 2005. – V. 409, N.5. – с. 482–486.

[16] V. Khatskevich, V. Senderov, and V. Shulman *On operator matrices generating linear fractional maps of operator balls*// Israel Conference Proceedings Contemporary Math. – 2004. – V. 364. – c. 93-102.

[17] V. Khatskevich and V. Senderov *Fractional-Linear Transformation of Operator Balls, Applications to Dynamical Systems*// Acta Math. Sinica, English Series, – 2006. – V.22. – c.1687–1694.

[18] V. Khatskevich and V. Shulman *Operator fractional-linear transformations: convexity and compactness of image; applications*// Studia Math. – 1995 – V.116,N.2. – c.189-195.

[19] V. Khatskevich and L. Zelenko *Bistrict plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems* // Operator theory and related topics, Vol. **II** (Odessa, 1997). Oper. Theory Adv. Appl., **118**, Birkhäuser, Basel. – 2000. – V.118. – c.191–203.

[20] V. Khatskevich and L. Zelenko *Plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems with a discrete time*// Studia Math. – 206 – V.177., N.3. – c.195-210

[21] Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л., Плюс-операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Матем. исследования* (Кишинев), **1** (1966), 1, 131–161.

[22] Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л. *О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами*// Матем. исследования (Кишинев). – 1967. – V.2, N.1. – c.64–96.

[23] M.J. Martin *Composition operators with linear fractional symbols and their adjoints*// First advanced course in operator theory and complex analysis. University of Seville, June, 2004.

[24] E. Vesentini *Semigroups of linear contractions for an indefinite metric*// Mem. Mat. Accad. Lincei. – 1994. – V.2. – c. 53–83.