

УДК 539.391+514.764.2

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ РАДИАЛЬНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В ПЛОСКОСТИ $z = 0$

Усачев А.С., Леяков А.П.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@tnu.crimea.ua, as213@mail.ru

В работе проведен анализ системы уравнений Эйнштейна и квадратичной формы, описывающих гравитационное поле радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны. Показана возможность существования большого числа вакуумных решений уравнений Эйнштейна, удовлетворяющих симметриям поставленной задачи.

Ключевые слова: нуль-струна, квадратичная форма, космология.

ВВЕДЕНИЕ

Теория струн является одной из самых сложных и амбициозных теорий в современной теоретической и математической физике. Одним из направлений теории струн является исследование роли этих объектов в космологии. В рамках различных моделей Теории Великого Объединения космические струны проявляются как топологические дефекты (наряду с доменными стенками и монополями) и поэтому представляют собой устойчивые во времени образования. Наряду со струнами во Вселенной могут существовать и так называемые нуль-струны, которые реализуют предел нулевого натяжения в теории струн [1-4]. Положение струны задается линией в D -мерном пространстве-времени. Эта линия, замкнутая для замкнутых струн и имеет концы для открытых. Траекторией струны является двумерная мировая поверхность, которая математически описывается функциями $x^m(\tau, \sigma)$, где τ и σ - параметры на мировой поверхности нуль-струны.

Целью работы является поиск возможных внешних решений системы уравнений Эйнштейна, описывающей гравитационное поле радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны в плоскости $z = 0$.

1. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ НУЛЬ-СТРУНЫ

В цилиндрической системе координат функции $x^m(\tau, \sigma)$, определяющие траекторию движения замкнутой, радиально расширяющейся нуль-струны в плоскости $z = 0$, имеют следующий вид

$$x^0 = t = \tau, \quad x^1 = \rho = \tau, \quad x^2 = \theta = \sigma, \quad x^3 = z = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (1.1)$$

Отметим, что для траектории (1.1) замкнутая нуль струна в каждый момент времени

t полностью лежит в плоскости $z = 0$. Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса [4] нуль-струны, для (1.1), имеют следующий вид

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = \frac{\gamma}{\sqrt{-g}} \delta(\rho - t) \delta(z - z_0), \quad (1.2)$$

где $g = |g_{mn}|$, g_{mn} ; $m, n = 0, 1, 2, 3$ метрический тензор внешнего пространства-времени, $\gamma = const$. Поскольку для сохраняющейся траектории движения (1.1), все направления на гиперповерхностях $z = const$ эквивалентны, то метрические функции не зависят от координаты θ , т.е.:

$$g_{mn} = g_{mn}(t, \rho, z). \quad (1.3)$$

Тогда, используя инвариантность квадратичной формы относительно инверсии θ на $-\theta$ получаем

$$g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0. \quad (1.4)$$

Так же можно заметить, что квадратичная форма пространства времени в решаемой задаче должна быть инвариантна относительно инверсии $z \rightarrow -z$, тогда

$$g_{mn}(t, \rho, z) = g_{mn}(t, \rho, -z). \quad (1.5)$$

Для (1.5)
$$g_{30} = g_{31} = 0. \quad (1.6)$$

Окончательно, используя свободу выбора систем координат в Общей Теории Относительности (ОТО), частично зафиксируем ее следующим образом

$$g_{10} = 0. \quad (1.7)$$

Учитывая (1.3)-(1.7) квадратичная форма для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu} (dz)^2, \quad (1.8)$$

где ν, μ, A, B , функции переменных t, ρ, z .

Движение нуль струны в псевдоримановом пространстве-времени определяется следующей системой уравнений:

$$x^\alpha_{,\tau\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta_{,\tau} x^\gamma_{,\tau} = 0, \quad g_{\beta\gamma} x^\beta_{,\tau} x^\gamma_{,\tau} = 0, \quad g_{\beta\gamma} x^\beta_{,\tau} x^\gamma_{,\sigma} = 0, \quad (1.9)$$

где $x^\alpha_{,\tau} = \partial x^\alpha / \partial \tau$, $x^\alpha_{,\sigma} = \partial x^\alpha / \partial \sigma$. Расписывая уравнения (1.9) для (1.8) с учетом того, что траектория (1.1) должна быть одним из частных решений уравнений движения, можно получить уравнения (связи) на метрические функции, при которых траектория движения нуль струны, задаваемая (1.1), остается неизменной:

$$e^{2\nu} = A, \quad \nu = \nu(\eta, z), \quad \text{где } \eta = t - \rho. \quad (1.10)$$

Таким образом, условием того, что траектория движения замкнутой нуль-струны, задаваемая (1.1), будет сохраняться при движении в собственном гравитационном поле, есть выполнение равенств (1.10). Используя (1.10) для (1.8) получим

$$dS^2 = e^{2\nu} (dt^2 - d\rho^2) - B d\theta^2 - e^{2\mu} dz^2. \quad (1.11)$$

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Из (1.2) видно, что все компоненты тензора энергии-импульса нуль-струны стремятся к бесконечности непосредственно на самой струне, а вне нее тождественно равны нулю. Анализ системы уравнений Эйнштейна построенной для квадратичной формы (1.11) позволил доопределить функциональную зависимость метрических функций искомой квадратичной формы, которая имеет вид

$$v = v(\eta, z), B = B(\eta, z), \mu = \mu(\eta, z),$$

при этом система уравнений Эйнштейна приводится к следующему виду:

$$2v_{,\eta}\mu_{,\eta} + v_{,\eta} \frac{B_{,\eta}}{B} - \mu_{,\eta\eta} - \mu_{,\eta}^2 - \frac{1}{2} \frac{B_{,\eta\eta}}{B} + \frac{B_{,\eta\eta}^2}{4B^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$2v_{,z} + \frac{B_{,zz}}{B} + 2v_z^2 - \frac{B_z^2}{2B^2} - 2\mu_{,z}v_z - \frac{B_z\mu_z}{B} + \frac{B_zv_z}{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$v_{,\eta z} + \frac{B_{,\eta z}}{2B} - \frac{B_zB_{,\eta}}{4B^2} - \frac{B_{,\eta}v_z}{2B} - \frac{B_z\mu_{,\eta}}{2B} - \mu_{,\eta}v_z = 0, \quad (2.3)$$

$$v_{,zz} + 3v_z^2/2 - v_{,z}\mu_{,z} = 0, \quad (2.4)$$

$$v_{,z}(v_z + B_z/B) = 0. \quad (2.5)$$

3. ВОЗМОЖНЫЕ ВНЕШНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Выполнить уравнение (2.5) можно одним из следующих способов

$$v_{,z} = 0, \quad v_z + B_z/B = 0, \quad \Rightarrow \quad v = v(\eta), \quad B = B(\eta), \quad (3.1)$$

$$v_{,z} = 0, \quad v_z + B_z/B \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v = v(\eta), \quad B = B(\eta, z), \quad (3.2)$$

$$v_{,z} \neq 0, \quad v_z + B_z/B = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v(\eta, z), \quad B = \alpha e^{-v}. \quad (3.3)$$

Для (3.1) уравнения (2.2)-(2.4) выполняются тождественно, и остается единственное уравнение (2.1), которое связывает между собой три искомые метрические функции $v(\eta)$, $\mu(\eta, z)$, и $B(\eta)$. Для случая (3.2) система уравнений Эйнштейна (2.1)-(2.4) сводится к единственному уравнению, связывающему метрические функции, которое имеет следующий вид:

$$2v_{,\eta}\mu_{,\eta} + 2v_{,\eta}N_{,\eta}/N - \mu_{,\eta\eta} - \mu_{,\eta}^2 - N_{,\eta\eta}/N = 0, \quad \text{где } N = \int e^{-\mu} dz. \quad (3.4)$$

Для случая (3.3) система уравнений (2.1)-(2.4) может быть приведена к виду:

$$3\alpha_{,\eta}v_{,\eta}/2\alpha - (v_{,\eta} - \mu_{,\eta})^2 + (\alpha_{,\eta}/\alpha - v_{,\eta})(\alpha_{,\eta}/\alpha + v_{,\eta})/4 - \mu_{,\eta\eta} - \alpha_{,\eta\eta}/2\alpha + v_{,\eta\eta}/2 = 0, \quad (3.5)$$

$$2v_{,zz} + 3v_z^2 - 2v_z\mu_{,z} = 0, \quad 3v_{,z}(v_{,\eta} - \alpha_{,\eta}/\alpha) + 2(v_{,\eta z} - v_{,z}\mu_{,z}) = 0. \quad (3.6)$$

Интегрируя (3.6) получим

$$v_{,z}e^{3v/2-\mu} = C_3(\eta) \quad \text{и} \quad v_z^2e^{3v-2\mu} = C_4\alpha^3. \quad (3.7)$$

Сравнивая полученные уравнений видно, что $C_4 = 1$, а $C_3 = \alpha^{3/2}$, поэтому

$$\nu_{,z} e^{3\nu/2} = \alpha^{3/2} e^{\mu}. \quad (3.9)$$

Поскольку функции $\nu(\eta, z)$ и $\mu(\eta, z)$ – четные по z , а функция $\nu_{,z}$ – нечетная по переменной z , то в левой части равенства (3.11) стоит нечетная по z функция, а в правой – четная по z , что невозможно. Следовательно, случай (3.3) не может быть реализован.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено общее выражение квадратичной формы, описывающей пространство-время радиально расширяющейся, замкнутой нуль-струны. Анализ системы уравнений Эйнштейна, построенной для искомой квадратичной формы, позволил доопределить функциональную зависимость функций метрического тензора внешнего пространства-времени. Показана возможность существования большого числа вакуумных гравитационных полей, удовлетворяющих симметриям поставленной задачи. Следующим этапом станет поиск критериев, позволяющих выделить из полученной совокупности единственное решение, которое описывает движение нуль-струны для исследуемой траектории.

Список литературы:

1. Peebles P.J.E. Principles of Physical Cosmology / Peebles P.J.E. – Princeton University Press, 1994. – 850 p.
2. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и космология / Линде А.Д. – М.: Наука, 1990. – 275с.
3. Kibble T.W.B. Some implications of cosmological phase transitions / Kibble T.W.B. // Phys. Repts. – 1980. – Vol. 67. – p. 183-189.
4. Vilenkin A. Cosmic strings / Vilenkin A. // Phys. Rev. – 1981. – Vol. 26 D. – p. 2082–2093.

Лесяков О.П. Квадратична форма, яка описує гравітаційне поле замкнутої нуль-струни, що радіально розширюється в площині $z = 0$ / Лесяков О.П., Усачев О.С. // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), №3. – С. 13-16.

У роботі був проведений аналіз квадратичної форми, метричних функцій та системи рівнянь Ейнштейна, які описують гравітаційне поле замкнутої нуль-струни, що радіально розширюється у площині $z = 0$. Була показана можливість існування великої кількості вакуумних розв'язків рівнянь Ейнштейна, які задовольняють симетріям поставленої задачі.

Ключові слова: нуль-струна, квадратична форма, космологія.

Lelyakov A.P. Quadratic form, describing gravitational field of the radially expanding closed null string / Lelyakov A.P., Usachyov A.S. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010 – Vol. 23(62), No.3. – P. 13-16.

In this work we have analyzed the quadratic form, metric functions and Einstein's equations, describing gravitational field of the radially expanding closed null-string in the flat $z = 0$. There is also shown the existence of many gravitational vacuum fields, satisfying the symmetries of the problem.

Keywords: null string, quadratic form, cosmology.

Поступила в редакцію 04.10.2010 г.