Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 7–22.

УДК 517.9+530.1

Е. П. Белан, О. В. Шиян

УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ ГОРЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ

Для распределенной автоколебательной системы, состоящей из диффузионно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и описывающей движение фронта горения, построены и исследованы на устойчивость периодические по времени пространственно неоднородные решения на отрезке с изолированными краями. Эти решения описывают режим распространения автоколебаний вдоль полосы и возникают при потери устойчивости пространственно однородного режима автоколебаний. Рассмотрены также вопросы о форме и устойчивости этих решений при углублении в область надкритичности.

Ключевые слова: горение, параболические уравнения, квазинормальная форма, бифуркация, стационарные решения, периодические решения, автомодельные циклы, орбитальная устойчивость, аттракторы

Введение

Эволюцию фронта безгазового горения феноменологически описывает уравнение [1, 2] :

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta\Big(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}\Big). \tag{1}$$

Здесь ξ — отклонение положения фронта от невозмущенного, соответствующего стационарному режиму, точка означает дифференцирование по времени t, $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \delta << 1$ — инкремент неустойчивости, Δ - одномерный лапласиан.

В данной работе уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \qquad (2)$$

Задача (1), (2) в случае $\beta = 0$ рассматривалась в работах [3, 2] в связи исследованием горения теплоизолированной полосы ширины l. Согласно [3, 2] задача (1) , (2) имеет решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы за исключением пространственно однородного периодического решения $\xi_0 = \cos t + O(\delta)$ — синфазной волны.

В работе авторов [4] было доказано, что при $\beta > 0$ пространственно однородный цикл теряет устойчивость тогда, когда параметр $\rho = 2\pi l/\lambda$ проходит бифуркационное значение $\rho_1 = \frac{1}{\beta}$ возрастая. При этом от цикла ξ_0 ответвляются два пространственно неоднородных (автомодельных) экспоненциально орбитально устойчивых цикла, переходящих друг в друга при преобразовании $x \to l - x$. Форма этих циклов при малых $\rho - \rho_1 > 0$ вполне определяется двумя параметрами. При увеличении параметра ρ и его отходе от ρ_1 динамика автомодельных циклов зависит от параметра β. Существует β^* такое, что при $\beta \in (0, \beta^*)$ автомодельные циклы сохраняют устойчивость на достаточно большом промежутке изменения бифуркационного параметра ρ. Если же $\beta > \beta^*$, то тогда существует значение $\widetilde{\rho}(\beta)$ такое, что при $\rho = \widetilde{\rho}(\beta)$ указанные циклы устойчивость теряют. Приведенные выше результаты были получены нами, используя метод Крылова-Боголюбова, метод усреднения [5], метод центральных многобразий.

Отметим теперь, что исследование решений типа бегущих волн уравнения (1) на окружности радиуса R представляет интерес поскольку эти решения соответствуют спиновым волнам горения на поверхности кругового цилиндра радиуса R. В [1] установлено, что число бегущих волн (1) на окружности радиуса R неограниченно увеличивается при увеличении R и фиксированных прочих параметрах. Необходимое условие устойчивости спиновых волн было получено в [1], а критерий их устойчивости установлены в [6, 7] при $\beta = 0$, опираясь на метод квазинормальных форм. В работе [8] критерий устойчивости бегущих волн был получен для случая $\beta \geq 0$.

В данной работе для исследования задачи о бифуркации рождения автомодельных циклов привлекается метод квазинормальных форм. Метод квазинормальных форм был предложенн Ю. С. Колесовым [9] для построения автоколебаний параболических уравнений с малой диффузией. Метод квазинормальных форм обоснован в [10]. Применению метода квазинормальных форм, его развитию и обоснованию посвящен ряд работ. Полученные результаты и библиография имеются в монографиях [11, 7]

Подчеркнем теперь, что задача о возникновения пространственно неоднородных периодических режимов из пространственно однородного цикла представляет значительный интерес [7, 12].

Статья организована следующим образом. В первом разделе рассматривается вопрос о локальной разрешимости начально-краевой задачи. Второй раздел посвящен построению квазинормальной формы и исследованию её устойчивых стационарных пространственно неоднородных решений. В третьем разделе исследуется упрощенная двухмодовая модель квазинормальной формы. В четвертом расматривается четырехмодовая модель. В пятом рязделе приведены результаты численного анализа. В Заключении подчеркнуты основные результаты работы.

1. Существование и единственность решения

Задача (1), (2) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi} = p, \\
&\dot{p} = -\xi + \delta\left(p(1-\frac{4}{3}p^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta p + \frac{\lambda\beta}{2\pi}\sqrt{-\Delta}p\right), \\
&\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение (1), (2) или (3) рассматривается при начальных условиях:

$$\xi\Big|_{t=0} = \xi_0, \quad \dot{\xi}\Big|_{t=0} = p_0, \text{ или } \xi\Big|_{t=0} = \xi_0, \quad p\Big|_{t=0} = p_0, \tag{4}$$

Обозначим, следуя [13, см. I.5], $H^s, s \geq 0$, шкалу пространств, порожденную на $[0,l]$ оператором $-\Delta$ (Δ - одномерный лапласиан) при условии (2). Норма в H^S определяется равенством $||u||_s^2 = \langle -\Delta^s u, u\rangle + \langle u, u\rangle$, где $\langle *, *\rangle$ - скалярное произведение в пространстве $H = L_2(0,l)$.

Система (3) является системой спаренных "обыкновенного"и "параболического"уравнений. Следуя [14, см. 3.4], приходим к заключению о существовании и единственности решения задачи (3), (4) при $\xi_0 \in H$, $p_0 \in H^1$. Итак, система (3) или, что то же самое, (1), (2) в пространстве $E = H \times H^1$ порождает локальную динамическую систему. Далее, в качестве фазового пространства задачи (1), (2) примем пространство E. Подчеркнем теперь, что методы и результаты качественной теории полулинейных параболических уравнений, развитые в монографии [14], применимы для исследования задачи (1), (2).

2. Квазинормальная форма и её аттракторы

Следуя [6, 7], автоколебательные режимы задачи (1) - (2) будем искать в виде ряда
$$\xi = u_0(t,\tau,\theta) + \delta u_1(t,\tau,\theta) + \ldots, \quad \tau = \delta t, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \tag{5}$$
где $u_j(t,\tau,\theta+2\pi) = u_j(t,\tau,\theta)$, $u_j(t+2\pi,\tau,\theta) = u_j(t,\tau,\theta)$, $j = 1,2,\ldots$, а
$$u_0(t,\tau,\theta) = \frac{1}{2}\Big(v(\tau,\theta)\exp(it) + \overline{v}(\tau,\theta)\exp(-it)\Big). \tag{6}$$
Подставляя далее равенства (5), (6) в (1) и приравнивая коэффициенты при δ, для нахождения v приходим к уравнению
$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\Big[\dot{u}_0\Big(1 - \frac{4}{3}\dot{u}_0^2\Big) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{u}_0 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{u}_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial\tau\partial t}\Big], \tag{7}$$
где точка — дифференцирование по t, а переменные τ, θ рассматриваются как параметры.

Из условия разрешимости уравнения (7) в классе 2π- периодических по t функций следует, что v — решение краевой задачи
$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}v + v - |v|^2 v, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0,\ l} = 0, \tag{8}$$
которая и является искомой квазинормальной формой.

Уравнение (8) при $\beta = 0$ является нелинейным уравнением с диффузией для комплексного параметра порядка [15]. Это уравнение среди потенциальных уравнений, т.е. имеющих при $\tau \to \infty$ лишь статистические, стационарные решения является простейшим, каноническим. Задача (8) является S^1-эквивариантной, т.е. инвариантной относительно группы вращений окружности. Следовательно, её нетривиальное стационарное решение порождает окружность стационарных решений. При этом все её точки имеют один спектр, содержащий, разумеется, нуль. В этой связи будем говорить о спектре устойчивости окружностей стационарных точек, а также, следуя [13], об их индексах неустойчивостей.

Задача (8) имеет окружность $|v| = 1$ стационарных решений. Рассмотрим вопрос об её устойчивости. С этой целью линеаризуем на нём уравнение (8). В результате приходим к задаче
$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}v - v - \overline{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0,\ l} = 0.$$
Перейдем теперь к соответствующей ей спектральной задаче
$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}v - v - \overline{v} = \lambda v, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0,\ l} = 0. \tag{9}$$
Обозначим
$$\alpha_k = \alpha_k(\rho,\beta) = 1 - \frac{k^2}{\rho^2} + \beta\frac{k}{\rho}, \quad k = 0,1,2,..., \quad \rho = 2\pi l/\lambda. \tag{10}$$

Применяя метод Фурье по полной в пространстве H^1 системе функций $\cos k\theta, k = 0, 1, \ldots,$ приходим к заключению, что $0, -2, \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 3, \ldots$ спектр задачи (9). Следовательно [14, см. 8.2], окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) является экспоненциально орбитально устойчивой, если $\alpha_1 < 1$ и неустойчивой, если $\alpha_1 > 1$. Отметим, что при $\alpha_1 = 1$ $v = i\cos\theta$ — собственная функция спектральной задаче (9), отвечающая нулевому собственному значению.

Привлекая (10), приходим к заключению, что окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) теряет устойчивость тогда, когда параметр ρ проходит бифуркационное значение $\rho_1 = \frac{1}{\beta}$ возрастая. При этом простая точка спектра задачи (9) переходит с отрицательной на положительную полуоси.

Характер потери устойчивости окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) отражает следующая теорема.

Theorem 1. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что задача (8) при $0 < \rho - \rho_1 < \delta_0$ ($\rho_1 = \beta^{-1}$) имеет две окружнсти пространственно неоднородных стационарных решений:*

$$\Big\{ \exp(i\varphi)(\sqrt{3 - 2\alpha_1} \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1}\cos\theta + O(\rho - \rho_1)), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\Big\}, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \tag{11}$$

Окружности (11) стационарных решений экспоненциально орбитально устойчивы.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы воспользуемся методом центральных многобразий [16, 17]. Реализацию метода центральных многобразий осуществим в два этапа. На первом этапе построим решения задачи (8) в виде

$$v = z_0 + z_1\cos\theta + \sigma_3(z, \bar{z}, \theta) + \sigma_5(z, \bar{z}, \theta) + \ldots, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \tag{12}$$

Здесь $z = (z_0, z_1)$, $\sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta)$, $\sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta + 2\pi) = \sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta)$, — формы степени $2k + 1$ относительно $z, \bar{z}$, а $z_k = z_k(\tau)$, $k = 0, 1$, удовлетворяет уравнению:

$$z_k' = \alpha_k z_k + b_{k,3}(z, \bar{z}) + b_{k,5}(z, \bar{z}) + \ldots, \quad k = 0, 1. \tag{13}$$

Здесь штрих – дифференцирование по τ, $b_{k,2s+1}$, $k = 0, 1$, $s = 1, 2, \ldots,$ — формы степени $2s + 1$ относительно $z, \overline{z}$, а $\overline{z_k}$, $k = 0, 1$, удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям. Подставим (12), (13) в уравнение (8). Приравняв затем формы третьей степени, относительно σ_3 приходим к уравнению

$$\begin{aligned}&\sum_0^1 \Big(\frac{\partial\sigma_3}{\partial z_s} z_s + \frac{\partial\sigma_3}{\partial\overline{z_s}}\overline{z_s}\Big)\alpha_s + \sum_0^1 b_{k,3}\cos(k\theta) = \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\sigma_3 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\sigma_3 + \sigma_3 - \Big|\sum_0^1 z_k\cos(\theta)\Big|^2 \sum_0^1 z_k\cos(k\theta)\end{aligned} \tag{14}$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $\cos k\theta$, $k=0,1$ в его неоднородности были нулевыми. Отсюда однозначно определяем $b_{k,3}$, $k=0,1$. Уравнению же (14) тогда удовлетворяет функция:

$$\sigma_3 = -\frac{1}{\alpha_0+2\alpha_1-\alpha_2}\Big(z_0|z_1|^2+\frac{1}{2}\overline{z_0}z_1^2\Big)\cos 2\theta - \frac{1}{4(3\alpha_1-\alpha_3)}|z_1|^2 z_1\cos 3\theta.$$

Подставим $b_{k,3}$, $k=0,1$, в (13) и опустим затем слагаемые $b_{k,5}(z,\bar z)+\ldots$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0\big(\alpha_0-|z_0|^2-|z_1|^2\big)-\frac{1}{2}\bar z_0 z_1^2,\\ z_1' &= z_1\Big(\alpha_1-2|z_0|^2-\frac{3}{4}|z_1|^2\Big)-\bar z_1 z_0^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь штрих – дифференцирование по τ, а $\overline{z}_k$, $k=0,1$, удовлеторяют комплексно сопряженным уравнениям. Отметим, что система (15) является S^1-эквивариантной системой, т.е. инвариантной относительно группы вращений окружности $(z_0,z_1)\mapsto \exp(i\varphi)(z_0,z_1)$, $\varphi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Легко видеть, что окружность $\{\exp(i\varphi)(1,0),\quad \varphi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ стационарных решений системы (15) экспоненциально орбитально устойчива, если $\alpha_1<1$ и неустойчива, если $\alpha_1>1$. При этом простая точка спектра этой окружности стационарных решений переходит с отрицательной на положительную полуоси тогда, когда параметр α_1 проходит значение 1 возрастая. Учитывая, что указанному собственному значению при $\alpha_1=1$ отвечает собственный вектор $\mathrm{colon}(0,0,i,-i)$ приходим к заключению, что при $\alpha_1=1$ для центрального многобразия системы (15), касательного в точке $(1,1,0,0)$ к пространству $\mathrm{Span}\{\mathrm{colon}(0,0,i,-i)\}$ имеет место разложение:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1+p_2s^2+p_3s^3+\ldots,\\ z_1 &= is+q_2s^2+q_3s^3+\ldots. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $p_k,q_k\in\mathbb{R}$, $k=2,3,\ldots$, а $s=s(\tau)$ — решение уравнения

$$s' = c_1s^3+c_3s^5+\ldots. \tag{17}$$

Подставим (16), (17) в систему (15) и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s. В результате имеем

$$p_2=-\frac{1}{4},\quad q_2=0, \tag{18}$$

Далее убеждаемся в справедливости следующих равенств

$$p_3=0,\quad ic_1=-2q_3-2ip_2-\frac{3}{4}i.$$

Следовательно,

$$p_3=0,\quad q_3=0,\quad c_1=-\frac{1}{4}. \tag{19}$$

Отметим, что процесс последовательного нахождения тейлоровских разложений (16), (17) неограниченно продолжим. В частности, приравняв коэффициенты при s^4, получим

$$p_4 = \frac{1}{4}p_2 - p_2^2 - p_2 c_1, \quad q_4 = 0.$$

Учитывая (18), (19), отсюда находим, что $p_4 = -\frac{1}{16}$.

Из вышеизложенного следует, что семейство уравнений

$$s' = (\alpha_1 - 1)s - \frac{1}{4}s^3. \tag{20}$$

— нормальная форма семейства уравнений (15) в окрестности $\alpha_1 = 1$, $z_0 = 1$, $z_1 = 0$. Очевидно, что равенством (12), в котором z_0, z_1 удовлетворяют (16), определяется центральное многообразие уравнения (8) в окрестности $\alpha_1 = 1$, $v = 1$.

В семействе уравнений (20) при $\alpha_1 = 1$ имеет место суперкритическая бифуркация типа "вилка". В результате от нулевого решения ответвляется два стационарных экспоненциально устойчивых решения

$$s^{\pm} = \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1}.$$

Привлекая теперь равенства (12), (16), приходим к заключению, что в задаче (8) от окружности пространственно однороднодных стационарных решений ответвляются две устойчивые окружности пространственно неоднороднодных стационарных решений. Отметим, что в бифуркации рождения из окружности стационарных решений системы (8)

$$\{\exp(i\varphi)(1, 0), \ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

двух устойчивых окружностей стационарных решений

$$\big\{\exp(i\varphi)(\sqrt{3 - 2\alpha_1}, \pm 2\imath\sqrt{\alpha_1 - 1}), \ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\},$$

можно убедиться и непосредственно. Отсюда в силу равенства (12) следует и справедливость представления (11) теоремы. Теорема доказана.

3. Анализ двухмодовой модели

Перейдем теперь к качественному анализу системы (15), рассматривая её, разумеется, в качестве двухмодовой упрощенной модели задачи (8). Легко видеть, что система (15) является двухмодовой галеркинской аппроксимацией задачи (8).

Предположим вначале, что α_1 является бифуркационным параметром в системе (15). Очевидно, что когда параметр α_1 проходит через нуль возрастая, тогда от нулевого неустойчивого решения системы (15) ответвляется окружность стационарных точек

$$S_{0,1}(\alpha_1) = \left\{\exp(i\varphi)\left(0, 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}}\right), \ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}.$$

Так как система (15) является в сущности градиентной (см. [4]), то спектр устойчивости окружности $S_{0,1}(\alpha_1)$ является вещественным. Отметим, что 2 — индекс неустойчивости $S_{0,1}(\alpha_1)$, если $\alpha_1 \in (0, \frac{1}{2})$.

Пусть теперь параметр α_1 возрастая переходит через $\frac{1}{2}$. Тогда индекс неустойчивости окружности $S_{0,1}(\alpha_1)$ уменьшается на порядок. Последнее приводит к бифуркации рождения двух окружностей стационарных точек

$$S_{0,1}^{\pm}(\alpha_1) = \Big\{ \exp(i\varphi)\Big(\pm \sqrt{\frac{2\alpha_1 - 1}{5}}, 2\sqrt{\frac{3-\alpha_1}{5}}\Big),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\Big\},$$

индекс неустойчивости которых равен 2. Подчеркнем теперь, что при $\alpha_1 < 1$ единственным аттрактором в системе (15) является окружность стационарных точек

$$S_{1,1}(\alpha_1) = \{\exp(i\varphi)(1,0),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход α_1 через 1 приводит к потере устойчивости окружности $S_{1,1}(\alpha_1)$ — одна простая точка её спектра возрастая, проходит через нуль . При этом из $S_{1,1}(\alpha_1)$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1) = \{\exp(i\varphi)(\pm\sqrt{3-2\alpha_1}, \pm 2\imath\sqrt{\alpha_1 - 1}),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

Если $1 < \alpha_1 < 1\frac{1}{2}$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1)$ — единственные аттракторы в системе (15). При $\alpha_1 = 1\frac{1}{2}$ окружности $S_{1,1}^{+}(\alpha_1)$ и $S_{1,1}^{-}(\alpha_1)$ сливаются и умирают на $S_{0,1}(\alpha_1)$. При $\alpha_1 > 1\frac{1}{2}$ $S_{0,1}(\alpha_1)$ — единственный аттрактор. Отметим, наконец, что при $\alpha_1 = 3$ в результате бифуркации типа "вилка"окружности $S_{0,1}^{+}(\alpha_1)$ и $S_{0,1}^{-}(\alpha_1)$ сливаются и умирают на $S_{1,1}(\alpha_1)$. При $\alpha_1 > 3$ индекс неустойчивости $S_{1,1}(\alpha_1)$ равен 2.

Учтем теперь, что бифуркационным в системе (15) является параметр ρ. Так как функция $\alpha_1(\rho)$ — монотонно возрастает на $(0, \frac{2}{\beta})$ и монотонно убывает на $(\dfrac{2}{\beta}, \infty)$, $\alpha_1(\frac{2}{\beta}) = 1 + \frac{\beta^2}{4}$, то динамика системы (15) при возрастании ρ зависит от величины β. Отметим особенности динамики системы (15) при возрастании ρ на примере динамики её аттрактров. Пусть параметр ρ проходит значение $\dfrac{1}{\beta}$ возрастая, тогда от окружности $S_{1,1}(\alpha_1(\rho,\beta)) = S_{1,1}(\rho,\beta)$ ответвляются две устойчивые окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$. Если $\beta < 2$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$ являются единственными аттракторами в (15) при $\rho \in \big(\frac{1}{\beta}, \infty\big)$. Отметим, что $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$ гладкие функции ρ на $\Big(\dfrac{1}{\beta}, \dfrac{2}{\beta}\Big)$. При возрастании ρ от значения $\dfrac{2}{\beta}$ окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$ проходят в обратном порядке свои значения.

Пусть теперь $\beta > 2$. Если $\rho \in \Big(\dfrac{1}{\beta}, \dfrac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}\Big)$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$ — аттракторы в системе (15). В точке $\rho = \dfrac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}$ окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho,\beta)$ умирают. Если же

$\rho \in \Big(\dfrac{2}{\beta+\sqrt{\beta^2-2}}, \dfrac{2}{\beta-\sqrt{\beta^2-2}}\Big)$, то тогда $S_{0,1}(\alpha_1(\rho,\beta)) = S_{0,1}(\rho,\beta)$ — единственный аттрактор в системе (20). В точке $\rho = \dfrac{2}{\beta-\sqrt{\beta^2-2}}$ окружность $S_{0,1}(\alpha_1(\rho,\beta))$ устойчивость теряет и от неё ответвляются две устойчивые окружности $S^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$. Таким образом, при $\rho > \dfrac{2}{\beta-\sqrt{\beta^2-2}}$ аттракторами в (15) являются $S^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$.

Для ответа на вопрос о соответствии динамики системы (15) динамике задачи (8) обратимся к её упрощенной 4-х модовой модели.

4. Анализ четырехмодовой модели

Построим аппроксимацию Галеркина задачи (8) по системе функций $\cos k\theta, k = 0,1,2,3$. С этой целью положим

$$v = \sum_{k=0}^{3} z_k \cos k\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \tag{21}$$

Подставим (15) в уравнение (8) и опустим затем слагаемые пропорциональные $\cos k\theta, k = 4,5,\ldots$. В результате относительно $z_k, k = 0,1,2,3$, приходим к системе

$$\begin{aligned} z_0{}' &= z_0\left(\alpha_0 - |z|^2\right) - \tfrac{1}{2}\bar z_0(d^2 - z_0^2) - f_0,\\ z_k{}' &= z_k\left(\alpha_k - |z|^2 - |z_0|^2 + \tfrac{1}{4}|z_k|^2\right) - \tfrac{1}{2}\bar z_k(d^2 + z_0^2 - z_k^2) - f_k, \quad k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $|z|^2 = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$, $d^2 = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$,

$$\begin{aligned} f_0 &= \tfrac{1}{4}z_1^2\bar z_2 + \tfrac{1}{2}|z_1|^2 z_2 + \tfrac{1}{2}(\bar z_1 z_2 z_3 + \bar z_2 z_1 z_3 + \bar z_3 z_2 z_1),\\ f_1 &= \tfrac{1}{4}z_1^2\bar z_3 + \tfrac{1}{2}|z_1|^2 z_3 + \tfrac{1}{4}z_2^2\bar z_3 + \tfrac{1}{2}|z_2|^2 z_3 +\\ &\quad +(\bar z_0 z_1 z_2 + \bar z_1 z_0 z_2 + \bar z_2 z_0 z_1) + (\bar z_0 z_2 z_3 + \bar z_2 z_0 z_3 + \bar z_3 z_2 z_0),\\ f_2 &= \tfrac{1}{2}z_1^2\bar z_0 + |z_1|^2 z_0 + (\bar z_0 z_1 z_3 + \bar z_1 z_0 z_3 + \bar z_3 z_0 z_1) + \tfrac{1}{2}(\bar z_1 z_2 z_3 + \bar z_2 z_1 z_3 + \bar z_3 z_2 z_1),\\ f_3 &= \tfrac{1}{4}z_2^2\bar z_1 + \tfrac{1}{2}|z_2|^2 z_1 + \tfrac{1}{4}z_1^2\bar z_1 + (\bar z_0 z_1 z_2 + \bar z_1 z_0 . z_2 + \bar z_2 z_0 z_1) \end{aligned}$$

Как и выше, при $\rho < \rho_1$ единственным аттрактором в системе (22) является окружность стационарных точек

$$\widetilde{S}_{1,1} = \{\exp(\imath\varphi)(1,0,0,0),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход ρ через ρ_1 приводит к потере устойчивости окружности $\widetilde{S}_{1,1}$ — одна простая точка её спектра проходит через нуль возрастая. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$\widetilde{S}^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta) = \{\exp(i\varphi)(x_0, \imath x_1, x_2, \imath x_3),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\rho,\beta), k = 0,1,2,3,\ \ x_1(\rho,\beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned}
&x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{3}{2}x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_3^2) - \tfrac{1}{4}x_1^2x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3 = 0,\\
&x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \tfrac{3}{4}x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2 - \tfrac{3}{2}x_3^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 - \tfrac{3}{4}x_1^2x_3 -\\
&\quad -\tfrac{1}{4}x_2^2x_3 = 0,\\
&x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{3}{4}x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_3^2) - \tfrac{1}{2}x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3 = 0,\\
&x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \tfrac{3}{2}x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2 - \tfrac{3}{4}x_3^2) - x_0x_1x_2 - \tfrac{1}{4}x_1x_2^2 - \tfrac{1}{4}x_1^3 = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Динамике окружностей стационарных точек $\widetilde{S}^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$ системы (22) при возрастании ρ соответствует динамика окружностей стационарных точек $S^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$ системы (15). Существует такое $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} \approx 1.91$, что при $\beta \in (0,\widetilde{\beta})$ окружности $\widetilde{S}^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$ сохраняют устойчивость на промежутке $(\frac{1}{\beta},\infty)$ изменения параметра ρ. Пусть теперь $\beta > \widetilde{\beta}$. Тогда существует такое $\widetilde{\rho}_1(\beta)$, что на промежутке $(\dfrac{1}{\beta},\widetilde{\rho}_1(\beta))$ окружности $\widetilde{S}^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$ устойчивы. При $\rho = \widetilde{\rho}_1(\beta)$ они сливаются и умирают на окружности $\widetilde{S}_{0,1}(\rho,\beta)$. Окружность стационарных точек

$$\widetilde{S}_{0,1}(\rho,\beta) = \{\exp(i\varphi)(0,x_1(\rho,\beta),0,x_3(\rho,\beta)),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

рождается из нулевого решения системы в точке ρ, определяемой из уравнения $\alpha_1(\rho,\beta) = 0$. Здесь $(0,x_1(\rho,\beta),0,x_3(\rho,\beta))$, $x_1(\rho,\beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы (23). При $\rho = \widetilde{\rho}_1(\beta)$ окружность $\widetilde{S}_{0,1}(\rho,\beta)$ обретает устойчивость и сохраняет её на промежутке $(\widetilde{\rho}_1(\beta),\widetilde{\rho}_2(\beta))$. При $\rho = \widetilde{\rho}_2(\beta)$ окружность $\widetilde{S}_{0,1}(\rho,\beta)$ теряет устойчивость и от неё ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек $\widetilde{S}^{\pm}_{1,1}(\rho,\beta)$. Таким образом, динамике аттракторов в системе (22) отвечает соответствующая динамика аттракторов в системе (15).

При отходе ρ от критических значений усиливаются отличия количественных характеристик соответствующих аттракторов в системах (22) и (15). Последнее, в частности, означает, что диапазон применения по параметру ρ формулы (11) является узким. Представление же двух пространственно неоднородных окружностей стационарных решений задачи (8) в виде

$$v_1^{\pm}(\theta,\rho,\beta) = x_0 \pm ix_1\cos\theta + x_2\cos 2\theta \pm ix_3\cos 3\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \tag{24}$$

где $x_k = x_k(\rho,\beta)$, $k = 0,1,2,3$ — указанная выше непрерывная ветвь решений системы (23), можно использовать на достаточно широком промежутке изменения параметра ρ.

Перейдем теперь к вопросу о качественных отличиях систем (22) и (15). Покажем, что в системе (22) при прохождении через критические значения имеет место бифуркация рождения неустойчивых окружностей неподвижных точек, аналогов которых в системе (15) нет.

Легко видеть, что когда параметр ρ возрастая проходит точку $2\rho_1$, индекс неустойчивости окружности $\widetilde{S}_{1,1}$ увеличивается на порядок. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две окружности стационарных точек

$$\widetilde{S}^{\pm}_{1,2}(\rho,\beta) = \{\exp(i\varphi)(\frac{1}{2}\sqrt{3-2\alpha_2}, 0, \pm i\sqrt{\alpha_2 - 1}, 0),\ \ \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

с индексом неустойчивости 1. Исследование устойчивости этих окружностей приводит к эрмитовой блочно-диагональной матрице. Один из её блоков имеет спектр, содержащий простой нуль, а остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси. Второй блок — матрица

$$Q_{1,2}(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 & -2a_2^2 & a_2^2 - 2ia_0a_2 \\ -a_0^2 + 2a_2^2 & \alpha_1 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & a_2^2 + 2ia_0a_2 & -2a_2^2 \\ -2a_2^2 & a_2^2 - 2ia_0a_2 & \alpha_3 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 \\ a_2^2 + 2ia_0a_2 & -2a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 & \alpha_3 - 2a_0^2 - 4a_2^2 \end{pmatrix},$$

где $a_0 = \sqrt{3-2\alpha_2}$, $a_2 = \sqrt{\alpha_2 - 1}$. При малых $\rho - 2\rho_1 > 0$ одна её простая точка спектра принадлежит положительной полуоси, остальные отрицательной. При отходе параметра ρ от бифуркационного значения $2\rho_1$ характер расположения спектра семейства матриц $Q_{1,2}(\rho)$ сохраняется, т.е. индекс неустойчивости окружностей $\widetilde{S}^{\pm}_{1,2}(\rho,\beta)$ не меняется.

Пусть теперь параметр ρ возрастая, проходит точку $3\rho_1$. Тогда индекс неустойчивости окружности $\widetilde{S}_{1,1}$ возрастает на порядок. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две окружности стационарных точек $\widetilde{S}^{\pm}_{1,3}(\rho,\beta)$, индекс неустойчивости которых при отходе ρ от $3\rho_1$ остаётся равным 2.

Построенная нами 6-ти модовая аппроксимация задачи (8) и её анализ привели к следующему заключению. Имеет место соответствие между динамикой при изменении ρ аттракторов системы (22) и аттракторов в указанной системе размерности 12. Когда параметр ρ возрастая, проходит точку ρ_1, тогда, как и в системе (**??**), от единичной окружности ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек. Если $\beta < \widehat{\beta}$, $\widehat{\beta} \approx 2.04$, то тогда эти окружности сохраняют устойчивость на промежутке (ρ_1, ∞) изменения параметра ρ. Если же $\beta > \widehat{\beta}$, то тогда существует бифуркационное значение ρ, при котором эти окружности сливаются и умирают на окружности стационарных точек. При этом существует зависящий от β интервал изменения параметра ρ, на котором эта окружность остаётся единственным аттрактором рассматриваемой системы. Переход параметра через правую точку указанного интервала, приводит к бифуркации рождения двух устойчивых окружностей стационарных точек. Эти окружности остаются единственными аттракторами упрощенной 6-ти модовой модели задачи (8) при дальнейшем возрастании ρ.

5. Численные результаты

Согласно равенств (5), (6), (21), (22), (23) функции

$$\xi_1^{\pm}(\theta,\rho,\beta) = x_0\cos t \pm x_1\sin t\cos\theta + x_2\cos t\cos 2\theta \pm x_3\sin t\cos 3\theta, \quad \theta = \tfrac{\pi x}{l}, \tag{25}$$

где $x_k = x_k(\rho,\beta)$, $x_0(\rho_1,\beta) > 0$, $x_1(\rho,\beta) > 0$, $k = 0,1,2,3,$ — непрерывная ветвь решений системы (23), являются приближенными автомодельными решениями задачи (1), (2). Вопрос же об устойчивости этих двух семейств периодических решений сводится к вопросу об устойчивости ветви $(x_k = x_k(\rho,\beta), k = 0,1,2,3)$ стационарных решений системы (22).

Приведём далее ряд результатов численного анализа решений системы (23), выполненных посредством программы Wolfram Mathematica 7.0. Здесь же приведём и спектр соответствующих стационарных точек системы (22).

При значительном отходе параметра от бифуркационного значения усиливается влияние старших мод на формы автомодельных решений. Для иллюстрации этого факта приводятся также и результаты численного анализа, полученные при 5-ти и 6-ти модовых аппроксимациях автомодельных решений задачи (1), (2). Отметим, что 6-ти модовая аппроксимация приводит к приближенному равенству

$$\begin{aligned}&\xi_1^{\pm}(\theta,\rho,\beta) = x_0\cos t \pm x_1\sin t\cos\theta + x_2\cos t\cos 2\theta\\ &\pm x_3\sin t\cos 3\theta + x_4\cos t\cos 4\theta \pm x_5\sin t\cos 5\theta,\end{aligned} \tag{26}$$

где $x_k = x_k(\rho,\beta)$, $x_0(\rho_1,\beta) > 0$, $x_1(\rho,\beta) > 0$, $k = 0,1,2,3,4,5,$ — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned}
&x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \tfrac12 x_1^2 - \tfrac32 x_2^2 - \tfrac12 x_3^2 - \tfrac32 x_4^2 - \tfrac12 x_5^2) - \tfrac14 x_1^2x_2 -\\
&\tfrac12 x_1x_2x_3 - \tfrac12 x_1x_3x_4 - \tfrac12 x_2x_3x_5 - \tfrac34 x_2^2x_4 = 0,\\
&x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \tfrac34 x_1^2 - \tfrac12 x_2^2 - \tfrac32 x_3^2 - \tfrac12 x_4^2 - \tfrac32 x_5^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 - x_0x_3x_4 -\\
&-x_0x_4x_5 - \tfrac34 x_1^2x_3 - \tfrac12 x_1x_2x_4 - \tfrac12 x_1x_3x_5 - \tfrac14 x_2^2x_3 - \tfrac14 x_2^2x_5 - \tfrac12 x_2x_3x_4 - \tfrac34 x_3^2x_5 = 0,\\
&x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \tfrac12 x_1^2 - \tfrac34 x_2^2 - \tfrac12 x_3^2 - \tfrac32 x_4^2 - \tfrac12 x_5^2) - \tfrac12 x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 - x_0x_2x_4 -\\
&-x_0x_3x_5\tfrac12 x_1x_2x_3 - \tfrac12 x_1x_3x_4 - \tfrac12 x_1x_4x_5 - \tfrac14 x_1^2x_4 - \tfrac12 x_3x_4x_5 = 0,\\
&x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \tfrac32 x_1^2 - \tfrac12 x_2^2 - \tfrac34 x_3^2 - \tfrac12 x_4^2 - \tfrac32 x_5^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_5 -\\
&-\tfrac14 x_1x_2^2 - \tfrac14 x_1^3 - \tfrac12 x_1x_2x_4 - \tfrac12 x_2x_3x_4 - \tfrac12 x_2x_4x_5 - \tfrac34 x_1^2x_5 = 0,\\
&x_4(\alpha_4 - 3x_0^2 - \tfrac12 x_1^2 - \tfrac34 x_2^2 - \tfrac12 x_3^2 - \tfrac32 x_4^2 - \tfrac12 x_5^2) -\\
&-\tfrac14 x_1^2x_2 - x_0x_1x_3 - x_0x_1x_5 - \tfrac14 x_2x_3^2 - \tfrac12 x_2x_3x_5 = 0,\\
&x_5(\alpha_5 - x_0^2 - \tfrac32 x_1^2 - \tfrac12 x_2^2 - \tfrac34 x_3^2 - \tfrac12 x_4^2 - \tfrac32 x_5^2) -\\
&-x_0x_1x_4 - \tfrac34 x_1^2x_3 - \tfrac14 x_1x_2^2 - \tfrac34 x_1x_3^2 = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $\beta = 1$. Тогда $\rho = 1.01$ отвечает решение $(0.9804,\ 0.2787,\ -0.0098,\ -0.0005)$, а $\{-23.57,\ -21.61,\ ...,\ -0.009,\ 0\}$ — её спектр. Здесь и далее приводятся минимальные и максимальные точки спектра.

$$\rho = 2 - (0.3896,\ 1.2901,\ -0.5672,\ -0.1381) - \{\ -3.11,\ -2.90, ...,\ -0.31,\ 0\}$$

$$\rho = 10 - (-0.0944,\ 0.7633,\ -1.00894,\ -0.6795) - \{-2.35,\ -2.31,\ ...,\ -0.15,\ 0\}.$$

$\beta = 1.9.$

$$\rho = 0.527 - (0.9940,\ 0.1544,\ -0.0013,\ -0.00003) - \{-23.57,\ -21.61,\ ...,\ -0.009,\ 0\}$$

$$\rho = 1 - (0.3248,\ 1.6243,\ -0.4120,\ -0.1428) - \{-6.97,\ -5.29,\ ...,\ -0.64,\ 0\}$$

$$\rho = 7 - (-0.1318,\ 0.5082,\ -1.1836,\ -1.0362) - \{-3.04,\ -2.93,\ ...,\ -0.31,\ 0\}$$

$$\rho = 10 - (-0.1329,\ 0.5490,\ -1.1490,\ -0.9476) - \{-2.76,\ -2.69,\ ...,\ -0.26,\ 0\}$$

$\beta = 3.$

$$\rho = 0.3334 - (0.9980,\ 0.0894,\ -0,0002,\ -0.000003) - \{-55.97,\ -53.98,\ ...,\ -0.004,\ 0\}$$

$$\rho = 0.3559 - (0.0401,\ 1,4373,\ -0,0027,\ -0.0155) - \{-47.92,\ -45.81,\ ...,\ -0.001,\ 0\};$$

$$\rho = 0.6515 - (0.0406,\ 2.1598,\ -0.0571,\ -0.1875) - \{-14.17,\ -9.95,\ ...,\ -0.012,\ 0\};$$

$$\rho = 1 - (0.1746,\ 1.8286,\ -1.4747,\ -0.3910) - \{-8.14,\ -7.63,\ ...,\ -1.25,\ 0\},$$

$$(0.1635, 1.8400, -1.4651, -0.3910, 0.0446),$$

$$(0.1648, 1.8307, -1.4785, -0.3866, 0.0409, -0.0193);$$

$$\rho = 7 - (-0.1164,\ 0.3521,\ -1.1875,\ -1.3342) - \{-3.92,\ -3.52,\ ...,\ -0.41,\ 0\},$$

$$(-0.1032, 0.2006, -0.4419, -1.3925, -1.4059),$$

$$(-0.0488, 0.1646, -0.2412, -0.3709, -1.205, -1.5458);$$

$$\rho = 10 - (-0.1268,\ 0.4048,\ -1.1609,\ -1.1852) - \{-3.36,\ -3.11,\ ...,\ -0.35,\ 0\},$$

$$(-0.1170, 0.2007, -0.4494, -1.2703, -1.2227),$$

$$(-0.0521, 0.1716, -0.2399, -0.3568, -1.1089, 1.4253).$$

Приведенные численные расчеты иллюстрируют сформулированное выше утверждение о зависимости динамики автомодельных решений от параметра β. В частности, видно, что, если $\beta = 1,\ 1.9$, то тогда автомодельные циклы рождаются и остаются устойчивыми на достаточно большом промежутке изменения ρ. При $\beta = 3$ существует бифуркационное значение параметра ρ, $\rho \approx 0.3559$, при котором два автомодельных цикла сливаются и умирают на пространственно неоднородном цикле, инвариантном относительно преобразования $x \to l - x$. Указанный цикл сохраняет устойчивость до критического $\rho \approx 0.6515$ значение параметра ρ. Когда параметра ρ проходит через указанное значение возрастая, тогда имеет место бифуркация рождения двух устойчивых автомодельных циклов, сохраняющих устойчивость при дальнейшем росте параметра ρ.

График решения $\xi_1^+(\theta, t,\ 10,\ 3)$ согласно формуле (22) отражает рисунок 1. Видно, что решение описывает достаточно сложный колебательный процесс. При этом амплитуда колебаний существенно зависит от пространственной переменной θ.

6. Заключение

Остановимся здесь на основных результатах работы. Для феноменологического уравнения теории горения вдоль полосы построена её квазинормальная форма — обобщенное параболическое уравнение с диффузией для комплексного параметра порядка. Установлено, что имеет место соответствие между автомодельными циклами исходной задачи и окружностями стационарных пространственно неоднородных решений её квазинормальной формы. В частности двум устойчивым автомодельным циклам исходной задачи, которые ответвляются от пространственно однородного цикла, отвечают две устойчивые окружности пространственно неоднородных стационарных решений её квазинормальной формы, ответвляющихся от окружности пространственно однородных стационарных решений. Динамика этих структур при возрастании бифуркационного параметра ρ зависит от величины β. Если $\beta < \beta^*$, $\beta^* \approx 2$, то два автомодельных цикла, переходящие друг в друга при преобразовании отражения отрезка $x \to l - x$, сохраняют устойчивость на достаточно большом промежутке изменения параметра ρ. На этом же промежутке сохраняют устойчивость и две окружности стационарных точек квазинормальной формы исходной задачи. Если $\beta > \beta^*$, то автомодельные циклы существуют на промежутке $(\beta^{-1}, \rho_1(\beta))$ изменения параметра ρ. При $\rho = \rho_1(\beta)$ они сливаются и умирают на автомодельном цикле, инвариантном относительно отражения отрезка. Этот цикл сохраняет устойчивость на зависящем от β промежутке изменения параметра ρ. При прохождении параметра ρ через правую точку интервала устойчивости от автомодельного цикла ответвляются два устойчивых автомодельных цикла, сохраняющих устойчивость при увеличении ρ. Эта же динамика имеет место и относительно соответствующих окружностей стационарных решений квазинормальной формы исходной задачи. Есть также веские основания утверждать, что указанные выше аттракторы являются единственными атракторами рассмотренной здесь задачи.

Список литературы

[1] Алдушин А. П. *Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения.* / А. П. Алдушин, Б. А.Маломед // Физика горения и взрыва, - 1981, – **17**, N 1, – С. 3 – 12.

[2] Зельдович Я. Б. *Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах.* / Я. Б.Зельдович, Б. А.Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика. – 1982. – **15**. – N 6. – С. 591 – 618.

[3] Маломед Б. А. *Распространение автоколебательных волн вдоль полосы.* / Б.А. Маломед// Изв. вузов, сер. Радиофизика. – 1981 – **14**. – N 5. – С.571 – 576.

[4] Белан Е.П. *Автоколебательные режимы горения вдоль полосы* / Е.П. Белан, О.В. Шиян // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 3–16.

[5] Боголюбов Н.Н. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука. – 1969. – 410 с.

[6] Колесов А. Ю. *Явление буферности в теории горения.* / А. Ю.Колесов, Н. Х.Розов // ДАН. – 2004. – **396**. – N 2. – С. 170 – 173.

[7] *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией.* / Е. Ф.Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю.Колесов, Н. Х.Розов. – М.: Физматлит. – 2005. – 430 с.

[8] Самойленко А. М. *Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения.* / А.М.Самойленко, Е.П.Белан // ДАН. – 2006. – **406**. – N 6. – С.738–741.

[9] Колесов Ю. С. *Метод квазинормальных форм в задаче об установившехся режимах параболических систем с малой диффузией.* / Ю.С. Колесов// УМЖ. – 1987. – Т.39. – №1. – С.27–34.

[10] Колесов Ю. С. *Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией.* / Ю.С.Колесов // Мат.сб. – 1993. – **184**. – № 3. – С.121–136.

[11] Колесов А. Ю. *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений.* / А.Ю.Колесов, Н.Х.Розов. –М: Физматлит. – 2004. – 406 с.

[12] *Структуры и хаос в нелинейных средах.* / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М.: Наука. – 2007. – 484 с.

[13] Бабин А.В. *Аттракторы эволюционных уравнений.* / А.В. Бабин, М.И. Вишик – М.: Наука. – 1989.

[14] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.*/ Д. Хенри – М.: Мир. – 1985. – 376 с.

[15] Гапонов-Грехов А.В.*Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах.* / А.В. Гапонов-Грехов, А.С. Ломов, Г.В. Осипов, М.И. Рабинович // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. ИПФ АН СССР. – 1989. – С.61–73.

[16] Марсден Дж.*Бифуркация рождения цикла и ее приложения.*/ Дж.Марсден, М. МакКракен. – М.: Мир. — 1980. – 368 с.

[17] Хэссард Б. М. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* / Б.М. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, – 1985. – 280 с.

Стійкі режими горіння вздовж смуги

Для розподіленої автоколивальної системи дифузіонно- зв'язаних осціляторов Ван-дер-Поля, яка описує рух фронту горіння, побудовано та досліджено на стійкість періодичні за часом просторово неоднорідні роз'вязкі на відрізку з ізольованими краями. Ці розвязкі описують режими розповсюдження автоколивань вздовж полоси та виникають під час втрати стійкості просторово однорідного режиму автоколивань. Розглянуто питання про форму та стійкість цих розв'язків під час заглиблення в область надкритичності.

Ключові слова: горіння, біфуркация, періодичні роз'вязкі, автомодельні цикли, орбітальна стійкість, параболічні рівняння, квазінормальная форма, аттрактори.

Stable-oscillating regimes combustion on the strip

We consider the auto-oscillating system of connected diffusionally Van-der-Pole oscillators. This system describe the front movement of the combustion on the segment with isolated edges. We constructed and investigate the stability of periodic spatially inhomogeneous solutions that bifurcate from the losing stability of spatially homogeneous periodic solution. We investigate problems of the form and the stability of this periodic solution in the deeply supercritical domain.

Keywords: combustion, bifurcation, periodic solutions, orbital stability, auto-model circles, parabolic equation, quasi-normal form