Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 10–22.

УДК 517.51

С. Ю. Артамонов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ПРОИЗВОДНОЙ РИССА

В работе построен модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса. Изучены его свойства в пространствах L_p 2π-периодических функций с $1 \le p \le +\infty$. Доказаны прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и эквивалентность K-функционалу, соответствующему производной Рисса.

Ключевые слова: модуль непрерывности, производная Рисса, средние Фейера, K-функционал.

Введение

Модуль гладкости является классическим средством описания гладкости функции. Концепция модуля гладкости находит множество приложений в теории аппроксимации, теории функциональных пространств и других областях современного анализа. Напомним (см., например, [2]), что модулем гладкости k-го порядка ($k \in \mathbb{N}$) в пространстве $L_p[0, 2\pi)$, $p \ge 1$, называется величина

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu f(x + \nu h) \right\|_p , \; f \in L_p \; \delta \ge 0 \,, \tag{1}$$

где

$$C_k^\nu = \frac{k(k-1)\dots(k-\nu+1)}{\nu\,!} \,. \tag{2}$$

Конструкция (1) может быть обобщена, если натуральный параметр k заменить на вещественный неотрицательный параметр α, а конечную сумму в (1) заменить на бесконечную сумму по всем неотрицательным целым значениям. Полученные таким путем модули гладкости изучались многими авторами, в частности Б.В. Симоновым, С.Ю. Тихоновым и М.К. Потаповым [10]. Для них были доказаны прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Вейля.

Вместе с тем, список существующих модулей гладкости должен быть существенно пополнен даже в одномерном случае. Действительно, для многих K-функционалов и аппроксимационных методов модули, упоминавшиеся выше, не годятся с точки зрения их эквивалентности K-функционалу и аппроксимационной ошибки данного метода. K-функционал, соответствующий производной Рисса, дает простейший пример. Качество аппроксимации средними Фейера может быть полностью описано в терминах K-функционала. С другой стороны, аппроксимационная ошибка средних Фейера не эквивалентна ни одному из рассматриваемых ранее модулей гладкости.

В работе К.В. Руновского и Х.-Ю. Шмайссера [8] введен модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса

$$\omega(f,\delta)_p = \sup_{0\le h\le\delta} \left\| \frac{4}{\pi^2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{f(x+(2\nu+1)h)}{(2\nu+1)^2} - f(x) \right\|_p, \ \delta \ge 0\,. \tag{3}$$

Получены прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Рисса.

В данной статье на основании методики, разработанной в [8] предлагается модификация модуля (3)

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p = \sup_{0\le h\le\delta} \left\| \frac{3}{\pi^2} \sum_{\nu\ne 0} \frac{f(x+\nu h)}{\nu^2} - f(x) \right\|_p, \ \delta \ge 0\,. \tag{4}$$

Основными результатами статьи являются доказанные для модуля (4) прямая оценка типа Джексона, теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Рисса и обратная оценка типа Бернштейна (Теоремы 2, 3 и 4 соответственно). Таким образом, мы показываем, что модуль непрерывности (3) – не единственный модуль, обладающий такими свойствами.

Определения, обозначения и предварительные сведения

Как обычно, $L_p \equiv L_p([0,2\pi))$, где $1 \le p < +\infty$, есть пространство измеримых вещественнозначных 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$\|\, f \,\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty\,,$$

и $C \equiv C([0,2\pi))$ $(p = +\infty)$ есть пространство непрерывных вещественнозначных 2π-переодических функций $f(x)$, снабженное нормой Чебышева

$$\| f \|_\infty \; = \; \max_{x\in \mathbb{R}} |f(x)| \; .$$

Как обычно, коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ заданы формулой:

$$f^\wedge(k) \; = \; (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \, , \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\widehat{f}(\xi)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \, , \; \xi \in \mathbb{R} \, .$$

Аппроксимативные свойства функций будем мерить с помощью наилучших приближений:

$$E_n(f)_p \; = \; \inf_{t\,\in\,\mathcal{T}_n} \| f - t \|_p \, , \; n \in \mathbb{N}_0 \, ,$$

где $\mathcal{T}_n$ - пространство тригонометрических полиномов степени не выше n.

Следуя [4], [5], назовем функцию $\varphi(x)$ генератором, если она определена на $\mathbb{R}$, является вещественно- или комплекснозначной и удовлетворяет следующим условиям:

- φ имеет компактный носитель ($r(\varphi) = \sup\{ \, |\, \xi \,| \, : \, \xi \in \operatorname{supp} \varphi \, \} < +\infty$);
- $\varphi(-\xi) \; = \; \overline{\varphi(\xi)}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(0) = 1$;
- φ непрерывна.

Класс генераторов будем обозначать через $\mathcal{K}$. Любая функция $\varphi \in \mathcal{K}$ порождает ядро

$$W_0(h) \equiv 1 \, , \; W_\sigma(h) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\, e^{ikh} \, , \; n \in \mathbb{N} \, , \tag{5}$$

и средние

$$\mathcal{F}_n^{(\varphi)}(f;x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(h)\, W_n(\varphi)(x-h)\, dh \; . \tag{6}$$

Отметим, что средние Фейера являются частным случаем (2), когда функция $\varphi(\xi) \; = \; (\, 1 - |\, \xi \,|\,)_+ \; (\, a_+ \; = \; \max(a,0)\,)$. В данной статье будем обозначать средние Фейера символом $\mathcal{F}_n$.

Символом $\mathcal{P}_\varphi$ будем обозначать множество $\{p \in (0,+\infty] : \widehat{\varphi} \in L_p(\mathbb{R})\}$.

Согласно определению, производная Рисса является линейным оператором корректно определенном на множестве всех тригонометрических полиномов

$$(e^{ikx})^{\langle\prime\rangle} \; = \; |\, k \,|\, e^{ikx} \, , \; k \in \mathbb{Z} \, . \tag{7}$$

Производная Рисса порождает K-функционал

$$K_{\langle ' \rangle}(f,\delta)_p \;=\; \inf_{g\,\in\,\widetilde{W}_p^1} \left\{ \| \, f - g \, \|_p + \delta \, \| \, g^{\langle ' \rangle} \, \|_p \right\} \,, \;\; f \in L_p \,, \;\; \delta \geq 0 \,, \tag{8}$$

где пространство $\widetilde{W}_p^1$ состоит из функций, таких что сама функция и ее сопряженная принадлежат пространству Соболева W_p^1.

Более полная информация по производной Рисса, пространствам $\widetilde{W}_p^1$ и K-функционалам (4) может быть найдена в [1], [3], [6], [7], [5].

Запись $A(f,n) \asymp B(f,n)$ будет обозначать одновременное выполнение двух неравенств

$$c_1 B(f,n) \leq A(f,n) \leq c_2 B(f,n),$$

где константы c_1 и c_2 не зависят от f и n.

Далее в работе символами c, c_1, c_2, c', c'' и т.д. будем обозначать константы, не зависящие от f и n. В разных формулах они могут быть разными.

Модуль непрерывности и его элементарные свойства

Рассмотрим модуль непрерывности, который определяется следующим образом:

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \;=\; \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \, \frac{3}{\pi^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{f(x+\nu h)}{\nu^2} \;-\; f(x) \right\|_p \,, \;\; \delta \geq 0 \,. \tag{9}$$

Введем операторы:

$$\widehat{T}_h f(x) \;=\; \frac{3}{\pi^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{f(x+\nu h)}{\nu^2} \,, \;\; h \in \mathbb{R} \,, \tag{10}$$

$$\widehat{\Delta}_h \;=\; \widehat{T}_h \;-\; I \,, \tag{11}$$

где I – единичный оператор.

Тогда модуль (9) может быть записан в виде

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \;=\; \sup_{0 \leq h \leq \delta} \| \, \widehat{\Delta}_h f(x) \, \|_p \,, \;\; \delta \geq 0 \,. \tag{12}$$

Следует отметить, что коэффициенты в представлении $\widehat{\Delta}_h$ связаны с коэффициентами Фурье 2π-периодической функции

$$\theta(x) = \frac{3}{2\pi^2} x^2 - \frac{3}{\pi} x$$

соотношением

$$\widehat{\Delta}_h f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(hk) \, f^{\wedge}(k) \, e^{ikx} \,, \tag{13}$$

которое несложно проверить непосредственным вычислением.

Простейшие свойства введенного модуля непрерывности, доказательства которых очевидны, даны в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Тогда* $\widehat{T}_h$ *и* $\widehat{\Delta}_h$, $h \in \mathbb{R}$, *линейные ограниченные операторы в* L_p *и*

$$\| \widehat{T}_h \|_{(p)} \ \le \ 1\,, \ h \in \mathbb{R}\,, \tag{14}$$

$$\| \widehat{\Delta}_h \|_{(p)} \ \le \ 2\,, \ h \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \ \le \ 2\,\| f \|_p\,, \ f \in L_p\,, \ \delta \ge 0\,. \tag{16}$$

Отметим также, что в силу (13) и учитывая определение производной Рисса, будем иметь для произвольного тригонометрического полинома $t(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{\Delta}_h t(x)}{h} \ &= \ \lim_{h\to 0}\sum_{|\,k\,|\le n}\frac{\theta(hk)}{h}\,t^\wedge(k)\,e^{ikx} \ = \\
&= \ \lim_{h\to 0}\sum_{|\,k\,|\le n}\left(\frac{3}{2\pi^2}(h^2k^2)\frac{1}{h}-\frac{3}{\pi}h|\,k\,|\frac{1}{h}\right)t^\wedge(k)\,e^{ikx} \ = \\
&= \ -\tfrac{3}{\pi}\sum_{|\,k\,|\le n}|\,k\,|\,t^\wedge(k)\,e^{ikx} \ = \\
&= \ -(3/\pi)t^{\langle\prime\rangle}(x)\,,
\end{aligned} \tag{17}$$

где n – порядок тригонометрического полинома $t(x)$. Из (17) получаем, для производной Рисса

$$(\cdot)^{\langle\prime\rangle} \ = \ -(\pi/3)\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{T}_h \ - \ I}{h} \tag{18}$$

по крайней мере на множестве тригонометрических полиномов.

Основные свойства

Пусть $m \ge 2$ и $m \in \mathbb{Z}$. Символом $\theta_m(\xi)$ обозначим 2π-периодическую четную функцию, заданную на $(0,\pi)$ формулой

$$\theta_m(\xi) \ = \ \frac{\theta(m\xi)}{\theta(\xi)}\ . \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\theta_m(\xi) \ = \ \sum_{j=1}^{m}\frac{f_j(x)}{\theta(x)},\ 0<\xi<\pi\,, \tag{20}$$

где

$$f_j(x) = \begin{cases} a_j(m)x^2 + b_j(m)x + c_j(m), x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}] \\ \\ 0, \quad x \notin [\alpha_j, \alpha_{j+1}]. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь

$$\alpha_j(m) = \frac{(j-1)\pi}{m}, \quad j = \overline{1, m+1},$$

$$\begin{cases} a_j(m) = \frac{6m^2}{\pi^2}, \\ \\ b_j(m) = -\frac{6m}{\pi}(2j-1), \\ \\ c_j(m) = 6j(j-1). \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,\theta_m^{\wedge}(k)\,| \,\le\, Cm^3\,, \tag{22}$$

где положительная константа C не зависит от m.

Доказательство. Обозначим через $Q_j(m)$ отношение $f_j(x)/\theta(x)$. Заметим, что $Q_j(\alpha_j) = Q_j(\alpha_{j+1}) = 0$, так как $f_j(\alpha_j) = f_j(\alpha_{j+1}) = 0$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, будем иметь:

$$\theta_m^{\wedge}(k) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j(x)\cos kx dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{k^2}\left(Q_j^{'}(x)\cos kx \Big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} \right) - \frac{1}{k^2}\left(\int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j^{''}(x)\cos kx dx \right) \right].$$

Оценим первое слагаемое в квадратных скобках. Так как

$$\left| Q_j^{'}(x)\cos kx \Big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} \right| \le |Q_j^{'}(\alpha_{j+1})| + |Q_j^{'}(\alpha_j)|,$$

то, учитывая что

$$Q_j^{'}(x) = \frac{f_j'(x)\theta(x) - f_j(x)\theta'(x)}{\theta^2(x)},$$

$$f_j(\alpha_j) = f_j(\alpha_{j+1}) = 0,$$

получаем:

$$|Q_j^{'}(\alpha_j)| = \frac{|2\frac{6m(j-1)}{\pi} - 2\frac{6m(2j-1)}{\pi}|}{|\frac{3(j-1)^2\pi^2}{m^2} - \frac{6\pi^2(j-1)}{m}|} \cdot 2\pi^2 \le C_1 \cdot m^2,$$

где, положительная константа C_1 не зависит от m и j. Здесь мы воспользовались тем, что $|2m-(j-1)| \geq \frac{m}{2}$ и тем что $\frac{2j-1}{j-1} \leq 3$. Для получения оценки $|Q_j^{'}(\alpha_{j+1})| \leq C_2 m^2$ все выкладки проводятся аналогично.
Второе слагаемое в квадратных скобках оценивается следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j^{''}(x) \cos kx dx \right| \leq \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} |Q_j^{''}(x)| |\cos kx| dx \leq$$
$$\leq \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} |Q_j^{''}(x)| dx = -Q_j^{'}(x)\Big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} = Q_j^{\prime}(\alpha_j(m)) - Q_j^{\prime}(\alpha_{j+1}(m)) \leq$$
$$\leq |Q_j^{'}(\alpha_{j+1})| + |Q_j^{'}(\alpha_j)| \leq C_3 m^2,$$

где положительная константа C_3 не зависит от m и j.
Таким образом,

$$|\theta_m^{\wedge}(k)| \leq \frac{C' m^2}{k^2} \sum_{j=1}^{m} 1 = \frac{C' m^3}{k^2},$$

и окончательно получаем, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\, \theta_m^{\wedge}(k) \,| \,\leq\, C m^3 \,.$$

Доказательство леммы завершено. ■

Пусть $t \geq 0$. Будем использовать обозначение $]\, t\, [$ для $[\, t\,]$, если $t \notin \mathbb{N}$, и для $[\, t\,]-1$, в противном случае.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq p \leq +\infty$. *Тогда*

$$\widehat{\omega}(f, t\delta)_p \,\leq\, c\,(\,1+]\,t\,[\,)^3\, \widehat{\omega}(f,\delta)_p\,,\ f \in L_p\,,\ \delta, t \geq 0\,, \tag{23}$$

где положительная постоянная c не зависит от δ, t и f.

Доказательство. В силу (12) оценка (23) является прямым следствием неравенства

$$\|\, \widehat{\Delta}_{mh} f(x) \,\|_p \,\leq\, C m^3 \,\|\, \widehat{\Delta}_h f(x) \,\|_p\,,\ f \in L_p\,,\ h, t \geq 0\,. \tag{24}$$

Для доказательства (24) заметим, что в силу (13)

$$\widehat{\Delta}_{mh} \,=\, \mathcal{D}\left(\frac{\theta(mh\cdot)}{\theta(h\cdot)} \right) \circ \mathcal{D}(\theta(h\cdot)) \,=\, \mathcal{D}(\theta_m(h\cdot)) \circ \widehat{\Delta}_h\,, \tag{25}$$

где символом $\mathcal{D}(g)$ обозначен линейный оператор мультипликаторного типа, действующий по закону

$$\mathcal{D}(g)(e^{ikx}) = g(k)e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Для $f \in L_p$ функция $g = \widehat{\Delta}_h f$ также принадлежит L_p в силу Леммы 1. Используя Лемму 2 и (25) будем иметь

$$\begin{aligned} \| \widehat{\Delta}_{mh} f \|_p \;&=\; \| \mathcal{D}(\theta_m(h\cdot))\, g \|_p \,=\, \left\| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \theta_m^{\wedge}(\nu)\, g(x+\nu h) \right\|_p \,\le\, \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\, \theta_m^{\wedge}(\nu)\,| \\ &\le\; \| g(x+\nu h)\|_p \,\le\, \| g \|_p \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\,\theta_m^{\wedge}(\nu)\,| \,\le\, Cm^3 \| g \|_p\,, \end{aligned}$$

откуда и получаем (24). ■

Прямая оценка типа Джексона

В этом разделе мы доказываем прямую теорему теории аппроксимации в одномерном случае для модуля непрерывности (9) в пространствах L_p с $1 \le p \le +\infty$ (Теорема 2). Этот результат базируется на новой формуле для средних (Лемма 3) и Лемме 4, показывающей, что генератор $\Phi(\xi)$, построенный по правилу

$$\Phi(\xi) \,=\, \sum_{\nu\ne 0} \theta^{\wedge}(\nu)\,\varphi(\nu\xi) \tag{26}$$

удобен для описания качества аппроксимации в терминах модуля гладкости (9).

Доказательства Леммы 3 и Леммы 4 существенно не отличаются от доказательства аналогичных утверждений в [8], поэтому ограничимся лишь их формулировками.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \mathcal{K}$ и $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. Тогда для $f \in L_p$ и $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f;x) \,=\, (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x+\sigma^{-1}h)\,\widehat{\varphi}(h)\,dh\,. \tag{27}$$

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{K}$ и $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. Тогда для $f \in L_p$ и $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\Phi)}(f;x) \,=\, (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{T}_{\sigma^{-1}h}\, f(x)\,\widehat{\varphi}(h)\,dh\,. \tag{28}$$

Теперь перейдем к доказательству основного результата данного раздела.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p \le +\infty$. *Тогда*

$$E_\sigma(f)_p \ \le \ c\,\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\ ,\ \ f\in L_p\,,\ \ \sigma\ge 0\ , \tag{29}$$

где положительная постоянная c *не зависит от* f *и* σ.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$E_\sigma(f)_p \ \le \ c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\ ,\ \ f\in L_p\,,\ \ \sigma\ge 1/2\ . \tag{30}$$

В самом деле, для $0 \le \sigma < 1/2$ утверждение теоремы будет следовать из (30) и Теоремы 1

$$E_\sigma(f)_p \,=\, E_{1/2}(f)_p \,\le\, c\,\widehat{\omega}(f,2)_p \,\le\, c'\,\widehat{\omega}(f,2/3)_p \,\le\, c'\,\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,.$$

Если $\sigma \ge 1/2$, то в силу (30) и Теоремы 1 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_p \ &\le\ c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p \,=\, c'\left(1+\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p \,\le \\ &\le\ c''\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,. \end{aligned}$$

Для доказательства (30) рассмотрим вещественнозначную четную бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем, сосредоточенным на отрезке $[-1,1]$. Очевидно, что

$$|\,\widehat{\varphi}(h)\,| \,\le\, c\,(1+|\,h\,|)^{-5}\,,\ \ h\in\mathbb{R}\,. \tag{31}$$

Применяя (26), Лемму 4, (12), Теорему 1 и (31), для $f\in L_p$ и $\sigma \ge 1/2$ будем иметь

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_p \ &\le\ \|\,f-\mathcal{F}_\sigma^{(\Phi)}(f)\,\|_p \,\le\, (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} \|\,\widehat{T}_{\sigma^{-1}h}f(x)-f(x)\,\|_p\,|\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \,\le \\ &\le\ \int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}|\,h\,|\right)_p|\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \,\le\, c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\int\limits_{\mathbb{R}}(\,1+|\,h\,|\,)\,|\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \\ &\le\ c'\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\,, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (30). ■

Эквивалентность

Хорошо известно [3], что аппроксимационная ошибка средних Фейера в пространстве L_p с $1 \le p \le +\infty$ эквивалентна K-функционалу, соответствующему производной Рисса, т.е.,

$$\|\,f-\mathcal{F}_\sigma(f)\,\|_p \,\asymp\, K_{\langle\prime\rangle}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\ ,\ \ f\in L_p\,,\ \ \sigma\ge 0\,. \tag{32}$$

В [8] было доказано, что

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle}\left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p \asymp \omega\left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p .$$

для модуля (3). В данном разделе мы покажем, что аналогичный результат имеет место также и для модуля (9).

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p \le +\infty$. *Тогда для* $f \in L_p$, $\sigma \ge 0$

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle}\left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p \asymp \widehat{\omega}\left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p . \tag{33}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Сначала докажем, что

$$\widehat{\omega}(f, \delta)_p \le c\, K_{\langle\prime\rangle}(f, \delta)_p , \ f \in L_p , \ \delta \ge 0 . \tag{34}$$

Принимая во внимание, что ($\varphi(\xi) = (1 - |\, \xi \,|)_+$)

$$\frac{2}{3}\, \theta(\pi\xi) = \varphi^2(\xi) - 1 , \ \xi \in \mathbb{R} ,$$

получаем для любого $h > 0$ ($\mathcal{F}_\infty = I$)

$$\frac{2}{3}\, \widehat{\Delta}_{\pi h} = -(\, I - \mathcal{F}_{1/h}\,) \circ (\, I + \mathcal{F}_{1/h}\,) . \tag{35}$$

Используя свойства оператора $\mathcal{F}_\sigma$ и (32), (35), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}(f, \delta)_p \ &\le\ \widehat{\omega}(f, \pi\delta)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \| \, \widehat{\Delta}_{\pi h} f(x) \, \|_p \le \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| I + \mathcal{F}_{1/h} \right\|_{(p)} \\ &\sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} \| f - \mathcal{F}_\lambda(f) \|_p \le c_1 \sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} \| f - \mathcal{F}_\lambda(f) \|_p \le \\ &\le\ c \sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} K_{\langle\prime\rangle}\left(f, (\lambda+1)^{-1}\right)_p = c\, K_{\langle\prime\rangle}\left(f, \frac{\delta}{\delta+1}\right)_p \le c\, K_{\langle\prime\rangle}(f, \delta)_p , \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (34).

Шаг 2. Докажем следующую оценку

$$K_{\langle\prime\rangle}(f, \delta)_p \le c\, \widehat{\omega}(f, \delta)_p , \ f \in L_p , \ \delta \ge 0 . \tag{36}$$

Для $\delta = 0$ оценка (36) немедленно следует из элементарных свойств модуля и K-функционала. Обозначим

$$g_\delta(x) = \mathcal{F}^{(\eta)}_{1/\delta}(f; x) , \ \delta > 0 . \tag{37}$$

где функция η вещественнозначная четная бесконечно дифференцируемая, имеет компактный носитель на $[-\pi, \pi]$ и $\eta(\xi) = 1$ для $|\, \xi \,| \le 1$. Хорошо известно [9], что

$$\| f - \mathcal{F}^{(\eta)}_\sigma(f) \|_p \le c\, E_\sigma(f)_p , \ f \in L_p , \ \sigma \ge 0 . \tag{38}$$

Используя (37), (38) и Теорему 2, получаем

$$\| f - g_\delta \|_p \le c\, E_{1/\delta}(f)_p \le c'\, \widehat{\omega}\left(f, \frac{\delta}{\delta+1}\right)_p \le c'\, \widehat{\omega}(f,\delta)_p \,. \tag{39}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{-3}{\pi}\frac{1}{Ax-B}\eta(x)$, где $A = \frac{3}{2\pi^2}$, $B = \frac{3}{\pi}$. Как легко видеть, φ принадлежит классу генераторов и

$$\theta(\xi)\,\varphi(\xi) \;=\; -(3/\pi)\,|\,\xi\,|\,\eta(\xi)\,,\ \xi\in\mathbb{R}\,,$$

следовательно

$$\widehat{\Delta}_\delta \circ \mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta} \;=\; -(2/\pi)\,\delta\,(\,\mathcal{F}^{(\eta)}_{1/\delta}\,)^{\langle\prime\rangle}\,.$$

Используя (37), будем иметь

$$\widehat{\Delta}_\delta\, \mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(f;x) \;=\; -(3/\pi)\,\delta\, g^{\langle\prime\rangle}_\delta(x)\,. \tag{40}$$

В силу (37) и (40) получаем

$$\begin{aligned} \delta\,\|\, g^{\langle\prime\rangle}_\delta \,\|_p \;&=\; (\pi/3)\,\|\,\widehat{\Delta}_\delta\, \mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(f;x)\,\|_p \;=\; (\pi/3)\,\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(\,\widehat{\Delta}_\delta f(x))\,\|_p \;\le \\ &\le\; (\pi/3)\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}\,\|_p\;\|\,\widehat{\Delta}_\delta f(x)\,\|_p \;\le\; c\,\widehat{\omega}(f,\delta)_p\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Причем, $\sup\limits_{\sigma\ge 0}\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_\sigma\,\|_p < +\infty$, так как $\widehat{\varphi}\in L_1(\mathbb{R})$.

Теперь (36) следует из (39) и (41) .

Объединяя (34), (36), получаем (33). Доказательство теоремы завершено. ■

Комбинируя полученный результат с обратной теоремой для K-функционала, порожденного однородным генератором [7], мы немедленно получим обратную оценку типа Бернштейна для модуля (9).

Теорема 4. *Для $1\le p\le +\infty$ справедливо неравенство*

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \;\le\; c\min(\delta,1)\sum_{\nu\in\mathbb{N}_0:\ \nu<1/\delta} E_\nu(f)_p\,,\ f\in L_p\,,\ \delta>0\,, \tag{42}$$

где положительная константа c не зависит от f и δ.

Следуя [8], назовем модуль непрерывности, эквивалентный K-функционалу, соответствующему производной Рисса, *модулем непрерывности, соответствующему производной Рисса* или *модулем Рисса.*

Объединяя Теорему 3 и Теорему 4, получаем цепочку эквивалентностей в пространстве L_p для $1\le p\le +\infty$, содержащую как классические, так и новые результаты:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_p \ &\le \ \| f - \mathcal{F}_{n-1}(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle}\left(f, n^{-1}\right)_p \asymp \\ &\asymp \ \widehat{\omega}\left(f, n^{-1}\right)_p \le \frac{c}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f)_p\,,\ f \in L_p\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{43}$$

В качестве следствия (43) покажем, что оценка (23) может быть усилена. В самом деле, для $m \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\omega}(f, m\delta)_p \le cK_{\langle\prime\rangle}(f, m\delta)_p \le c'mK_{\langle\prime\rangle}(f, \delta)_p \le c''m\widehat{\omega}(f, \delta)_p, \tag{44}$$

что влечет за собой справедливость следующего неравенства

$$\widehat{\omega}(f, t\delta)_p \le c\,(1 +]\,t\,[\,)\,\widehat{\omega}(f, \delta)_p\,,\ f \in L_p\,,\ \delta, t \ge 0\,. \tag{45}$$

Список литературы

[1] Butzer, P. and R. Nessel: *Fourier Analysis and Approximation.* Vol. 1. New-York and London: Academic Press 1971.

[2] DeVore, R. and G. Lorentz: *Constructive Approximation.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag 1993.

[3] Ditzian, Z., Hristov, V. and K. Ivanov: *Moduli of smoothness and K-functionals in* L_p, $0 < p < 1$. Constr. Approx. 11 (1995), 67–83.

[4] Rukasov, V., Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On convergence of families of linear polynomial operators.* Func. et Approx. 41 (1) (2009), 41–54.

[5] Rukasov, V., Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On quality of trigonometric approximation by families of linear polynomial operators.* Math. Nachr. (2011)

[6] Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *Smoothness and function spaces generated by homogeneous multipliers.* J. of Function Spaces and Appl. (2010) (*to appear*).

[7] Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On K-functionals generated by homogeneous multipliers.* Revista Mat. Comp. (2011) (*to appear*).

[8] K. Runovski, H.-J. Schmeisser: *On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative.* Jenaer Schriften fur Math. und Inf. Math/Inf/01/11. Preprint.

[9] K. Runovski, I. Rystsov, H.-J. Schmeisser, Computational aspects of a method of stochastic approximation, J. Anal. and Appl. 25 (2006), 367-383.

[10] Tikhonov, S.: *Moduli of smoothness and the interrelation of some classes of functions.* In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics". Proc. of Int. Conf. in honour of J. Peetre on his 65-th birthday, Lund, Sweden, August 17-22, 2000. Printed by W. de Gruyter: Berlin, New York, 2002, 413–424.

Про деякі властивості модуля неперервності, відповідного похідної Рісса

У роботі побудован модуль неперервності, відповідний похідної Рісса. Вивчено його властивості в просторах L_p 2π-періодичних функцій с $1 \leq p \leq +\infty$. Доведено пряма оцінка типу Джексона, зворотна оцінка типу Бернштейна і еквівалентність K-функціоналу, відповідному похідної Рісса.

Ключові слова: модуль неперервності, похідна Рісса, середні Фейєра, K-функціонал.

On Some Properties of Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative

A modulus of continuity related to the Riesz derivative is constructed. Its properties are studied in the spaces L_p of periodic functions with $1 \leq p \leq +\infty$. The direct Jackson type estimate, the inverse Bernstein type estimate and equivalence to the K-functinoal related to the Riesz derivative are proved.

Keywords: modulus of continuity, Riesz derivative, Fejer means, K-functional.