Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 8–18.

УДК 517.968.7

М. В. Ахрамович, И. В. Орлов

ВАРИАНТ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА БАНАХА-ШТЕЙНГАУЗА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получена новая теорема типа Банаха-Штейнгауза и соответствующий принцип равностепенной непрерывности в произвольных полных отделимых локально выпуклых пространствах. Рассмотрены некоторые приложения полученных результатов.

Ключевые слова: теорема Банаха-Штейнгауза, локально выпуклое пространство, проективная шкала пространств, бэровские категории, равностепенная непрерывность.

Введение

Теорема Банаха-Штейнгауза и связанный с ней принцип равномерной ограниченности (см., например, [1]) являются одними из основополагающих принципов функционального анализа, служат фундаментом многих направлений функционального анализа и его приложений.

Теорема Банаха-Штейнгауза — исторически первый абстрактный принцип линейного функционального анализа, открытый С. Банахом в 1920 году и независимо от него Г. Ханом в 1922 году (для случая $Y = \mathbb{R}$).

Первоначальная формулировка теоремы Банаха-Штейнгауза в банаховых пространствах неоднократно обобщалась. В настоящее время классической принято считать формулировку принципа равномерной ограниченности в классе бочечных пространств, содержащем, в частности, все полные метризуемые локально выпуклые пространства (ЛВП) (и, в частности, все банаховы пространства) и их индуктивные пределы ([2]-[4]).

Работы по изучению пространств, обладающих так называемым "свойством Банаха-Штейнгауза продолжаются и в настоящее время. В последние десятилетия появились работы по "универсальным теоремам типа Банаха-Штейнгауза в которых непрерывность предельного оператора последовательности непрерывных операторов утверждается при минимальных требованиях к начальному и конечному пространствам ([5], [6]). Эти исследования активно продолжаются и в настоящее время ([7]-[10]).

В нашей работе предложен новый вариант универсальной теоремы типа Банаха-Штейнгауза, который, в небочечном случае, обобщает результаты, полученные в работе [5]. Рассмотрены некоторые приложения.

1. Основные результаты

Перед доказательством основного результата докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\{E^t\}_{t\in T}$*– приведенная проективная шкала локально выпуклых пространств. Если подмножества* $E^{0,t}\subset E^t$ *имеют* I *категорию по Бэру в пространствах* E^t*,* $t\in T$*, и образуют проективную шкалу множеств (относительно вложений в исходной шкале), то множество* $E^0=\varprojlim\limits_{t\in T}E^{0,t}$ *также имеет* I *категорию по Бэру в пространстве* $E=\varprojlim\limits_{t\in T}E^t$*.*

Доказательство. Обозначим через $\phi_t\ :\ \ E\hookrightarrow E^t$– канонические вложения, порожденные вложениями в шкале $\{E^t\}_{t\in T}$. Как известно, ϕ_t– непрерывные и *почти открытые* линейные операторы (то есть для любой окрестности нуля $U(0)\subset E$ замыкание ее образа $\overline{\phi_t(U)}$ есть окрестность нуля в E_t, $t\in T$).

Допустим теперь, что E^0 не имеет I категории по Бэру в E. Следовательно, для любого разбиения $E^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E^0_n$ найдется такой номер n_0, что замыкание $\overline{E^0_{n_0}}$ имеет внутреннюю точку в E.

Рассмотрим, для произвольного $t\in T$, разбиение $E^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E^t_n$, где E^t_n нигде не плотны в E^t (для любого $n\in\mathbb{N}$), и положим

$$E^0_n=\phi^{-1}\left(E^t_n\right)\cap E^0,\quad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\phi_t^{-1}\left(E^t_n\right)=\phi_t^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E^t_n\right)=\phi_t^{-1}\left(E^t\right)=E,\ \text{то}\ E^0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E^0_n.$$

Следовательно, в силу допущения, существует номер n_0 такой, что $\overline{E^0_{n_0}}$ имеет внутреннюю точку в E. Имеем:

$$\overline{\phi_t\left(\overline{E^0_{n_0}}\right)}=\overline{\phi_t\left(\overline{\phi_t^{-1}\left(E^t_{n_0}\right)\cap E^0}\right)}\subset$$

$$\subset\overline{\phi_t\left(\phi_t^{-1}\left(E^t_{n_0}\right)\right)\cap\phi_t\left(E^0\right)}=\overline{E^t_{n_0}\cap\phi_t\left(E^0\right)}\subset\overline{E^t_{n_0}}.$$

Поскольку, в силу почти открытости, замыкание $\overline{\phi_t\left(\overline{E^0_{n_0}}\right)}$ одержит внутреннюю точку, то и замыкание $\overline{E^t_{n_0}}$ также содержит внутреннюю точку. Это означает, что $E^t_{n_0}$ не является нигде не плотным в E^t, то есть мы пришли к противоречию. $\square$

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы VII.6.45 ([2]) на случай последовательностей операторов в полных отделимых локально выпуклых пространствах.

Теорема 1. *Пусть E и F — полные отделимые ЛВП, последовательность операторов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(E,F)$, поточечно сходится к оператору A на всюду плотном в E множестве. Тогда:*

1) либо $\{A_k\}$ расходится B-п.в. и даже B-п.в. неограничена;

2) либо $\{A_k\}$ поточечно сходится к A всюду на E, $A \in L(E,F)$, $\{A_k\}$ равностепенно непрерывна и $\{A_k\}$ равномерно сходится к A на каждом компакте из E.

Доказательство. Пусть E_0 — плотное подпространство в в E. Представим E и F в виде проективных пределов банаховых пространств следующим образом.

Пусть $\{\|.\|\}_{s\in S}$ и $\{\|.\|\}_{t\in T}$ —определяющие системы полунорм в E и F соответственно. Тогда $E = \varprojlim\limits_{s\in S} \widetilde{E_s}$, $F = \varprojlim\limits_{t\in T} \widetilde{F^t}$ где $\widetilde{E_s}$ —это фактор-пространства $(E/ker\|.\|_s)$, пополненные по соответствующим фактор-нормам, $\widetilde{F^t}$ —фактор-пространства $\left(F/ker\|.\|^t\right)$, пополненные по соответствующим фактор-нормам. При этом канонические вложения запишем в виде $e_s : E \to \widetilde{E_s}$, $f^t : F \to \widetilde{F^t}$.

Обозначим $E^0_s = e_s\left(E^0\right)$ $(\forall s \in S)$. Поскольку $E \hookrightarrow \widetilde{E_s}$, $E^0_s \hookrightarrow E$, то $E^0_s \hookrightarrow \widetilde{E_s}$.

Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$. По непрерывности A_k,

$$\forall\ t \in T\ \exists\ s \in S : \left(\|h\|_s \to 0,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t \to 0\right),$$

в частности,

$$\left(\|h\|_s = 0,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t = 0\right),\ \text{т. е. } A_k\left(ker\|.\| \cap E^0\right) \subset ker\|.\|^t$$

(для соответствующих t и s).

Это позволяет продолжить операторы A_k до операторов $\widetilde{A}^t_{k,s(k,t)} : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t$ следующим образом:

$$A^t_{k,s(k,t)}\left(x + ker\|.\| \cap E^0\right) := A_k(x) + ker\|.\|^t\ (\forall x \in E^0).$$

Покажем непрерывность операторов $A^t_{k,s}$. Зафиксируем $t \in T,\ s \in \nu_{A_k}(t)$. По непрерывности A_k,

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\ \left(\|h\|_s < \delta,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t < \epsilon\right).$$

Рассмотрим $\widehat{h} \in E_s^0 : \ \|\widehat{h}\|_s^\sim < \delta$. Поскольку $\|\widehat{h}\|_s^\sim = \inf\limits_{h \in \widehat{h}} \|h\ \|_s$, то $\exists\ h \in \widehat{h}$: $\|\ h\|_s < \delta$. Следовательно,

$$\left(\|A_k h\|^t < \epsilon\right) \Rightarrow \left(\|A^t_{k,s}(\widehat{h})\|^t_\sim = \inf_{p \in \widetilde{A}^t_{k,s}} \|p\|_s \leq \|A_k h\|^t < \epsilon\right),$$

откуда $A^t_{s,k}$ непрерывен, поэтому можно продолжить $A^t_{s,k}$ по непрерывности до $\widetilde{A}^t_{k,s} : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t$.

Таким образом, любой оператор A_k порождает систему (шкалу) линейных непрерывных операторов

$$\mathfrak{A}_k = \{\widetilde{A}^t_{k,s(k,t)} : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t\}_{t \in T}.$$

При этом для любого фиксированного $t \in T$ последовательность $\{\widetilde{A}^t_{k,s}\}$ поточечно сходится на $E_s^0 \hookrightarrow \widetilde{E}_s$.

Для произвольного фиксированного t обозначим

$$E^t_\infty = \varprojlim_{k \to \infty} \widetilde{E}_{s(k,t)}.$$

Ввиду счетности $\{s(k,t)\}_{k=1}^\infty$, E^t_∞ — пространство Фреше. При данном переходе к проективному пределу получаем соответствующую проективную шкалу подпространств $\{E^0_{s(k,t)}\}_{k=1}^\infty$, для которой проективный предел $E^{0,t}_\infty = \varprojlim\limits_{k \to \infty} \widetilde{E}^0_{s(k,t)^0}$, в силу плотности вложений $E_s^0 \hookrightarrow \widetilde{E}_s$, будет плотным подпространством в E^t_∞.

Таким образом, мы получаем для любого фиксированного $t \in T$ последовательность операторов $\{A^t_k : E^t_\infty \to \widetilde{F}^t\}$, которая поточечно сходится на $E^{0,t}_\infty \subset E^t_\infty$ к A^t. Следовательно, к $\{A^t_k\}$ можно применить теорему VII.6.45 ([2]). Рассмотрим два возможных случая.

I. *Существует конфинальная подсеть $T' \subset T$ такая, что $\forall t' \in T'$ последовательность $\{A^{t'}_k\}$ расходится B-п.в. и даже B-п.в. неограничена.*

Согласно первой части утверждения I, $\forall t' \in T'$ множество $E^{o,t'}_\infty$ (на котором есть сходимость по построению) имеет I категорию по Бэру в E^t_∞. Тогда по лемме 1 множество $E^0 = \varprojlim\limits_{t \in T} \widetilde{E}^{0,t}_\infty = \varprojlim\limits_{t' \in T'} \widetilde{E}^{0,t'}_\infty$ также имеет I категорию по Бэру в пространстве $E_\infty = \varprojlim\limits_{t \in T} E^t_\infty$.

Согласно второй части утверждения I, $\forall t' \in T'$ последовательность $\{A^{t'}_k\}_{k=1}^\infty$ неограничена в любой точке из $M^{t'}_\infty \subset E^{t'}_\infty$, где $N^{t'}_\infty = E^{t'}_\infty \setminus M^{t'}_\infty$-множество I категории.

Поскольку множество в проективном пределе $F = \varprojlim\limits_{t'} \widetilde{F}^{t'}$ ограничено только тогда, когда оно ограничено в любом $\widetilde{F}^{t'}$, то отсюда следует, что последовательность $\{A_k x\}_{k=1}^\infty$ также неограничена в любой точке $x \in M_\infty \subset E$, где $E \setminus M_\infty =: N_\infty = \varprojlim\limits_{t' \in T'} N^{t'}_\infty$. По лемме 1, N_∞ — множество I категории.

Таким образом, из утверждения I следует: последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ расходится на E B-п.в., и даже B-п.в. неограничена.

II. *Существует* $t_0 \in T: \ \forall t \succeq t_0$ *последовательность* $\{A_k^t\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* A^t *всюду на* E_∞^t, A^t *непрерывен, последовательность* $\{A_k^t\}$ *равностепенно непрерывна и* A_k^t *равномерно сходится к* A^t *на каждом компакте из* E_∞^t.

Согласно первой части утверждения II, $A_k^t \to A^t$ всюду на E_∞^t. В силу вложений $E \hookrightarrow E_\infty^t \xrightarrow{A_k^t} \widetilde{F}^t$, сходятся продолжения $A_k^t\mid_E \to A^t\mid_E$.

Поскольку сходимость в проективном пределе $F = \varprojlim_{t\in T} F^t = \lim_{t\succeq t_0} F^t$ равносильна сходимости в каждом из F^t, то отсюда следует, что $A_k \to A$ всюду на E.

Согласно второй части утверждения II, оператор A^t непрерывен. Тогда по теореме (V.2 [3]) оператор $A: \ E \to F = \varprojlim_{t} \widetilde{F}^t$ также непрерывен.

Согласно третьей части утверждения II, последовательность $\{A_k^t\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна (можно считать, что $A_k^t : E \to F^t$), то есть

$$\forall\ V^t(0) \subset \widetilde{F}^t\ \exists\ U^t(0) \subset E: \ A_k^t\left(U^t\right) \subset V^t\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку базис окрестностей нуля в F имеет вид

$$V(0) = \left(f^{t_1}\right)^{-1}\left(V^{t_1}\right) \cap \ldots \cap \left(f^{t_n}\right)^{-1}\left(V^{t_n}\right),$$

то выбрав соответствующую окрестность нуля $U^l(0) \subset E$ для любого индекса $l = \overline{1,n}$ такую, что все

$$A_k^{t_l}\left(U^l\right) \subset V^{t_l}\ (k = 1, 2, \ldots),$$

получаем

$$A_k\left(U_l\right) = A_k^{t_l} \circ \left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(U_{t_l}\right) \subset \left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(V^{t_l}\right),\ (l = \overline{1,n}),$$

откуда

$$A_k\left(\bigcap_{l=1}^{n} U_l\right) \subset \bigcap_{l=1}^{n}\left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(V_{t_l}\right) = V(0),$$

то есть $\{A_k\}$ равностепенно непрерывна на E.

Согласно четвертой части утверждения II, $\{A_k^t\}$ равномерно сходится к A^t на любом компакте из E_∞^t. Допустим, что существует компактное множество $C \subset E$, на котором нет равномерной сходимости A_k к A. Из предложения (III.7 [11])следует, что существует компактное множество $C_\infty^t \subset E_\infty^t$ такое, что $C_\infty^t = Ce^t$, где $e^t : E \to E_\infty^t$. Тогда на C_∞^t не будет равномерной сходимости A_k^t, что противоречит утверждению II. Следовательно, $\{A_k\}$ равномерно сходится к A на любом компакте из E. □

Следствие 1. *Пусть* E *и* F*-полные отделимые ЛВП, последовательность операторов* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ *поточечно сходится к оператору* A. *Тогда* $A \in L(E,F)$, $\{A_k\}$ *равностепенно непрерывна на* E *и* $\{A_k\}$ *равномерно сходится к* A *на каждом компакте из* E.

Доказательство. Поскольку поточечная сходимость имеет место на всем пространстве E, то случай 1) теоремы 1 не выполняется, то есть имеет место случай 2), что и требовалось доказать. $\square$

2. Приложения полученных результатов

2.1. **Матричные методы суммирования.** Получим обобщение теоремы 7.2.4 ([4]) на случай полного отделимого ЛВП.

Пусть A — бесконечная матрица, то есть скалярная функция на произведении $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Обозначим через $D(A)$ множество тех $x \in C^{\mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum\limits_n A_{m,n}x_n$ сходится при каждом m. Матрица A определяет линейное отображение u_A пространства $D(A)$ в $C^{\mathbb{N}}$, которое каждому $x \in D(A)$ сопоставляет последовательность $y = u_A(x)$, определенную соотношениями $y_m = \sum\limits_n A_{m,n}x_n$ $(m \in \mathbb{N})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E-векторное подпространство в $D(A)$ и F — векторное подпространство в $C^{\mathbb{N}}$, причем E и F наделены структурами ЛВП, удовлетворяющими следующим условиям:*

1) F отделимо, и каждое $y \in F$ является пределом своих конечных сечений $s_k y$;

2) E-полное отделимое ЛВП.

Тогда, если $u_A(E) \subset F$, то u_A непрерывно отображает E в F.

Доказательство. В силу условия 2) и следствия 1 отображение $x \mapsto u_A(x)(m)$ непрерывно на E для каждого m. Пусть $u_k : E \to F$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — отображение, определяемое k-тым сечением элемента $u_A(x)$, $u_k(x) = s_k u_A(x)$. В силу 1), $\lim u_k = u_A$ поточечно в E. Если F_k–подпространство в F, образованное теми $y \in F$, для которых $y = s_k y$ (то есть $y(n) = 0$ при $n > k$), то F_k конечномерно и может быть наделено единственной отделимой линейной топологией. Обозначим её через T. Топология T совпадает с топологией, определяемой любым тотальным множеством линейных форм на F_k, например линейными формами $y \to y(m)$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$. В силу 7.2.4 ([4]), u_k непрерывно относительно топологии T. С другой стороны, так как F отделимо, то топология T должна совпадать с топологией, индуцированной топологией пространства F. Таким образом, u_k непрерывно отображает E в F. Используя тот факт, что E — полное отделимое ЛВП, получаем, что поточечный предел u_A последовательности $\{u_k\}$ есть непрерывное отображение, а множество отображений $\{u_k\}$ равностепенно непрерывно, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. *Покажем, что пространство F, удовлетворяющее условиям теоремы 2, существует.*

Введем в $C_y^{\mathbb{N}} := C^{\mathbb{N}} \supseteq F$ топологию поточечной сходимости–это отделимая локально выпуклая топология, причем полная (поскольку фундаментальность в $C_y^{\mathbb{N}}$

равносильна фундаментальности по каждой координате в отдельности, отсюда следует, что топология поточечной сходимости в $C_y^{\mathbb{N}}$) — полная.

Так как для любого $y \in U_A(E)$, $y = U_A(x)$, то все $y_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}x_n$ сходятся. Рассмотрим сечение $s_k(y) = (y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots)$

Обозначим $U_A(E)^s = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [s_k U_A(E)]\right) \cup U_A(E)$. Положим $F = \overline{U_A(E)^s}$; тогда F — замкнутое подпространство в $C_y^{\mathbb{N}}$, откуда следует, что F — полное отделимое ЛВП.

Заметим, что для $y \in U_A(E)^s$ верно: все $s_k(y) \in U_A(E)^s$ по построению. Возьмем $y^{k_0} \in s_{k_0}(U_A(E))$. Тогда

$$s_k\left(y^{k_0}\right) = s_k(y_1, \ldots, y_{k_0}, 0, \ldots) =$$
$$= \left(y_1, \ldots, y_{min(k,k_0)}, 0, \ldots\right) \in s_{min(k,k_0)}(U_A(E)).$$

Пусть $y \in \overline{U_A(E)^s}$; рассмотрим последовательность $y^l \in U_A(E)^s$, сходящуюся к $y^{(0)}$ поточечно. Если

$$y = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0, \ldots\right),$$

то $y_p^l \to y_p^0$, $(\forall p \in \mathbb{N})$. Тогда $\forall s_{k_0}\left(y^{(0)}\right)$ имеет место сходимость

$$y_{k_0}^l = \left(y_1^l, \ldots, y_{k_0}^l, 0, \ldots\right) \to s_{k_0}\left(y^{(0)}\right),\ (l \to \infty).$$

Но $y_{k_0}^{(l)} = s_{k_0}\left(y^{(l)}\right) \in U_A(E)^s$, откуда, $s_{k_0}\left(y^{(0)}\right) \in \overline{U_A(E)^s}$.

2.2. **Недифференцируемость B-почти всюду функций класса Бэра $\mathbf{B}_\infty[\mathbf{0};\mathbf{1}]$.** Определим пространства (с топологией равномерной сходимости):

$$B_o[0;1] := C[0;1] - \text{нулевой класс Бэра},$$

$$B_1[0;1] := \{f:\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), f_n \in B_o[0;1]\},$$

$$B_2[0;1] := \{f:\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), f_n \in B_1[0;1]\}$$

. . . .

Получаем последовательность банаховых пространств $\{B_n[0;1]\}_{n=1}^{\infty}$, где каждое $B_{n-1}[0;1]$ изоморфно вложено в $B_n[0;1]$. Рассмотрим пространство $B_\infty[0;1] := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n[0;1]$ с топологией индуктивного предела, то есть $B_\infty[0;1] = \varinjlim\limits_{n\to\infty}(B_n[0;1], \tau_n)$, где τ_n — топология равномерной сходимости в пространстве $B_n[0;1], n \in \mathbb{N}$. По теореме 2.5.3 [12],

$$\left(f_\alpha \xrightarrow{B_\infty[0;1]} f_0\right) \Leftrightarrow \left(f_\alpha \xrightarrow{B_n[0;1]} f_0, \text{при некотором } n \in \mathbb{N}\right),$$

откуда следует, что $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть топология $B_\infty[0;1]$ секвенциальная. Таким образом, $B_\infty[0;1]$ — полное отделимое ЛВП (и, в силу секвенциальности, — пространство Фреше).

Рассмотрим последовательность линейных непрерывных форм $u_{n,a}$ на $B_\infty[0;1]$:

$$u_{n,a}(\varphi) := \frac{\varphi\left(a+\frac{1}{n}\right)-\varphi(a)}{\frac{1}{n}},\; u_{n,a} = n\left(\delta_{\left(a+\frac{1}{n}\right)} - \delta_{(a)}\right),$$

где δ — δ-функция Дирака ($\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$).

Формы $u_{n,a}$ сходятся к δ'_a при $\varphi \to \delta_a$ на всюду плотном в $B_\infty[0;1]$ подпространстве $C^1[0;1]$. Покажем, что последовательность $\mathcal{U} = \{u_{n,a}\}_{n=1}^\infty$ неограничена.

Множество $\mathcal{U}$ ограничено тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset B_\infty[0;1]$ найдется константа $M_K < \infty$ такая, что $\sup\limits_{\varphi\in K, u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\varphi)| < M_K$.

Поскольку любое конечное множество компактно, то рассмотрим компакт $\hat{K} := \{\hat{\varphi}_a(x) = \sqrt{|x-a|}, x \in [0;1]\}$ из $B_\infty[0;1]$. Поскольку

$$\sup_{\varphi\in K, u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\varphi)| \geq \sup_{u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\hat{\varphi})| =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| n\left(\sqrt{\left|a+\frac{1}{n}-a\right|} - \sqrt{|a-a|}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n} = \infty,$$

то последовательность $\mathcal{U} = \{u_{n,a}\}_{n=1}^\infty$ неограничена. Следовательно, по теореме 1 множество функций $\varphi \in B_\infty[0;1]$, для которых $u_{n,a}$ сходятся, I категории. Отсюда следует, что B-почти все функции из $B_\infty[0;1]$ не дифференцируемы в точке a.

Пусть R_1 — счетное плотное подмножество отрезка $[0;1]$. Множество функций, дифференцируемых в точке $a \in R_1$, I категории. Объединение счетного числа таких множеств снова имеет I категорию по Бэру. Поэтому B-почти каждая функция из $B_\infty[0;1]$ не дифференцируема в каждой точке R_1.

Пусть φ — такая функция из $B_\infty[0;1]$, для которой в любой точке $a \in R_1$ последовательность $\mathcal{U}$ неограничена. Зафиксируем φ и покажем, что она недифференцируема в B-почти каждой точке $x \in [0;1]$. Докажем, что φ — B-п.в. разрывная функция.

Допустим, что это не так. Следовательно, замыкание множества точек A, в которых функция φ непрерывна, содержит хотя бы одну внутреннюю точку. Пусть $x \in int\overline{A}$; тогда $\exists\delta > 0 : (x-\delta; x+\delta) \subset \overline{A}$. Обозначим

$$\delta_{max} = \sup_{\delta>0, (x-\delta;x+\delta)\subset\overline{A}} \delta,$$

$$\Delta = (x - \delta_{max}; x + \delta_{max}).$$

Очевидно, $R_1 \cap \Delta := R_2$ — счетное всюду плотное в Δ множество. Образуем последовательность функций

$$\varphi_n = \frac{\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}, x \in \Delta.$$

Это последовательность непрерывных (нелинейных) функций на пространстве Δ, не ограниченная ни в одной точке счетного плотного множества R_2. Поскольку при доказательстве теоремы 1 (и, соответственно, теоремы VII.6.45 ([2]) линейность операторов исходной последовательности не фигурировала в первой возможности, то получаем, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена в B-почти каждой точке $x \in \Delta$, откуда следует, что φ B-п.в. недифференцируема на Δ, то есть множество D точек из Δ, в которых φ дифференцируемо, I категории. Объединение таких множеств по максимальным интервалам непрерывности φ снова имеет I категорию. Таким образом, B-почти все функции из $B_\infty[0;1]$ B-п.в. не дифференцируемы.

3. Заключительные замечания

Отметим вначале, что условия теоремы 1, вообще говоря, слабее условий теоремы VII.6.45 ([2]), поскольку бэровские пространства полны. При этом существуют полные отделимые ЛВП, не являющиеся бочечными ([4]), а в силу теоремы II.7.1 ([3]), и бэровскими.

В силу сказанного выше результат следствия 1 не перекрывается следствием 7.4.4 ([4]). Но так как существуют неполные бочечные пространства ([4]), то утверждения следствий 1 и 7.4.4 ([4]) совпадают в случае полных отделимых бочечных пространств.

Поскольку ([12]) пространство E бочечно только тогда, когда его топология совпадает с сильнейшей локально выпуклой топологией E, то в небочечном случае результат следс̃твия 1 сильнее результата теоремы 1 ([5]).

В условии теоремы 1, в отличие от условий в предложении 7([9]), не требуется равномерной сходимости на некотором классе ограниченных множеств. Но поскольку при этом непрерывный оператор является секвенциально непрерывным, то условия теоремы 1 и предложения 7([9]) перекрываются лишь частично. Однако результат теоремы 1 сильнее результата предложения 7([9]).

В рассмотренном приложении к матричным методам суммирования условия теоремы 2 частично перекрывают условия теоремы 7.2.4 [4]. Построен пример пространства, удовлетворяющего условиям теоремы 2 и не удовлетворяющего условиям теоремы 7.2.4 [4].

В рассмотренном приложении к недифференцируемости B-почти всюду функций класса Бэра $B_\infty[0;1]$ полученный результат не является тривиальным и есть обобщение классического результата (гл. VII, §6 [2]). Действительно, пространство $B_\infty[0;1]$ содержит как подпространство $C[0;1]$; недифференцируемость B-почти всюду функций из класса $B_\infty[0,1]$ означает не только недифференцируемость B-почти всюду функций из класса $C[0;1]$, но и недифференцируемость B-почти всюду функций из его дополнения до класса $B_\infty[0;1]$.

Список литературы

[1] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – Москва: Наука, 1965. – 520 С.

[2] Шварц Л. *Анализ. Том 2.* – Москва: Мир, 1972. – 528 С.

[3] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1971. – 359 С.

[4] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – Москва: Мир, 1969. – 1072 С.

[5] Cui Chengri, Soncho Han. *Banach-Steinhaus properties of locally convex spaces.* // Kangweon-Kyuingki Math. Jour. — 1997. — Vol. 5, № 2. — P. 227–232.

[6] Li Ronglu, Min-Hyung Cho. *Banach-Steinhaus type theorem which is valid for every locally convex space.* // Appl. Func. Anal. — 1993. — Vol. 1, № 1. — P. 146–147.

[7] Enno Kolk. *Banach-Steinhaus type theorems for statistical and τ-convergence with applications to matrics maps.* // Rocky Mountain J. Math. — 2010. — Vol. 40, № 1. — P. 279–289.

[8] Lahrech S., Jaddar A., Hlal J., Ouahab A., Mbarki A. *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for bounded convex processes.* // Int. Journal of Math. Analysis. — 2007. — Vol. 1, № 9. — P. 437–441.

[9] Lahrech Samir *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for linear bounded operators.* // Note di Matematica. — 2004. — Vol. 23, № 1. — P. 167–171.

[10] Lahrech S., Jaddar A., Hlal J., Ouahab A., Mbarki A *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for LSC convex processes* // Int. J. Contemp. Math. Sciences. — 2007. — Vol. 2, № 24. — P. 1183–1187.

[11] Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1967. – 260 С.

[12] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Издательство иностранной литературы, 1959. – 419 С.

Варіант універсальної теореми типу Банаха-Штейнгауза у довільних повних локально опуклих просторах

Отримано нову теорему типу Банаха-Штейнгауза і відповідний принцип рівностепеневої неперервності у довільних повних відокремних локально опуклих просторах. Розглянуті деякі застосування отриманих результатів.

Ключові слова: теорема Банаха-Штейнгауза, локально опуклий простір, проективна шкала просторів, берівські категорії, рівностепенева неперервність.

Variant of universal Banach-Steinhaus type theorem for arbitrary locally convex spaces

A Banach-Steinhaus type theorem and the corresponding equicontinuity principle for the arbitrary complete separable locally convex spaces are received. Some applications of the results above are considered.

Keywords: Banach-Steinhaus type theorem, locally convex space, projective scale of spaces, Baire's categories, equicontinuity.