Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 21(60) № 1 (2008), с. 3–10.

О.П. Бойко

О СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ СТИЛЬТЬЕСОВСКИХ СТРУН С ОДНОМЕРНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

MSC2000: 34K29, 34K10

Введение

Начало изучению прямых и обратных задач для струн с одномерным трением было положено в работах [1], [2], [3], где рассматривались весьма широкие классы струн, в том числе не имеющие плотности в классическом понимании. Важным подклассом является класс гладких струн. Уравнение колебаний струны, плотность которой имеет вторую производную, с помощью известного преобразования Лиувилля [4] можно привести к уравнению Штурма-Лиувилля. Прямые и обратные задачи для таких струн рассматривались во многих работах (см, например, [5]).

Другим важным подклассом струн являются стильтьесовские струны, т.е. невесомые нити несущие сосредоточенные массы. Модели физических явлений, связанных с стильтьесовскими струнами широко используются в теоретической механике и инженерном деле [6], [7], [8], а также в теории электрических цепей [9].

В настоящей статье рассматриваются колебания стильтьесовских струн с конечным числом сосредоточенных масс, подверженных одномерному трению. Подход настоящей статьи основывается на классических результатах из книги [10] и использует разложение в цепную дробь, введенное Стильтьесом [11].

1. Постановки

В [12] рассмотрена нить длины l, натянутая единичной силой и несущая n сосредоточенных масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, через $l_0, l_1, \ldots, l_n$ обозначены длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Рассмотрен случай, когда левый конец струны жестко закреплен, а правый конец, несущий массу m_n, движется с коэффициентом вязкого трения α.

В этом случае для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$ уравнение колебаний k-ой массы имеет следующий вид:

$$\frac{v_k(t) - v_{k+1}(t)}{l_k} + \frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + m_k v_k''(t) = 0. \tag{1}$$

Закрепление левого конца струны описывается уравнением

$$v_0(t) = 0, \tag{2}$$

а уравнение колебаний демпфированной массы m_n имеет вид:

$$\frac{v_n(t)}{l_n} + \frac{v_n(t) - v_{n-1}(t)}{l_{n-1}} + m_n v_n''(t) + \alpha v_n'(t) = 0. \tag{3}$$

Избавляясь от времени с помощью стандартной подстановки $v_k(t) = u_k e^{i\lambda t}$ получаем соответствующую краевую задачу:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \tag{4}$$

$$u_0 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n\lambda^2 + i\alpha\lambda)u_n = 0. \tag{6}$$

В [12] с использованием методов [10] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть задано число $l > 0$. Для того чтобы множество комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm1, \dots, \pm n)$ было спектром задачи (4)-(6) с $\{m_k\}_1^n$, $\{l_k\}_0^n$, таких что $\sum_{k=0}^n l_k = l$, и $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$ *для* $k = 0, \pm1, \pm2, \dots \pm n$*;*

(2) $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$ *для не чисто мнимых* λ_{-k} *и кратности симметрично расположенных чисел совпадают .*

Следует отметить, что ранее этот результат был получен другим способом в [13], [14], а для случая свободного левого конца он следует из результатов работы [1].

В [15] рассмотрен случай когда трение приложено в промежуточной точке. Такая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k \lambda^2 u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_1) \tag{7}$$

$$\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k+1}}{\tilde{l}_k} + \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tilde{l}_{k-1}} - \tilde{m}_k \lambda^2 \tilde{u}_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_2) \tag{8}$$

$$u_0 = 0, \tag{9}$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \tag{10}$$

$$u_{n_1+1} = \tilde{u}_{n_2+1}, \tag{11}$$

$$\frac{u_{n_1+1} - u_{n_1}}{l_{n_1}} - \frac{\tilde{u}_{n_2+1} - \tilde{u}_{n-2}}{l_{n_2}} = -i\alpha\lambda u_{n_1+1} \tag{12}$$

и представляет собой описание струны общей длины l, состоящей из двух частей: левой части длины $\hat{l}$ и правой части длины $l - \hat{l}$. В левой части струны расположено n_1 масс $m_1, m_2, \dots, m_{n_1}$, пронумерованные в порядке возрастания индекса от левого конца струны к правому, а в правой части струны расположено n_2 масс $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_{n_2}$, пронумерованные в обратном порядке от правого конца струны к левому. В точке соединения частей струны расположено невесомое кольцо, движущееся в направлении перпендикулярном к равновесному положению струны, с коэффициентом вязкого трения α. Длины интервалов, на которые точки приложения масс делят струну, обозначены через $l_0, \dots, l_{n_1}$ и $\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{n_2}$ и пронумерованы от соответствующего конца струны до точки приложения трения.

Для задачи (7)-(12) в [15] получена следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть заданы числа $l > 0$ и $\hat{l} \in (0; l)$. Для того чтобы множество комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \dots, \pm n)$ было спектром задачи (7)-(12) с общим числом масс n и длинами интервалов l_k $(k = 0, 1, \dots, n_1)$ и $\tilde{l}_k$ $(k = 0, 1, \dots, n_2)$, таких что $\sum_0^{n_1} l_k = \hat{l}$ и $\sum_0^{n_2} \tilde{l}_k = l - \hat{l}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) $\operatorname{Im} \lambda_k \geq 0$ *для* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$, $\lambda_k \neq 0$;

(2) $\lambda_{-k} = -\overline{\lambda_k}$ *для не чисто мнимых* λ_{-k} *и кратности симметрично расположенных чисел совпадают;*

(3) *Все вещественные* λ_k *(если такие есть) однократные;*

(4) *Для каждого вещественного* λ_k *справедливо* $\operatorname{Im} \Phi'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} = 0$, $\operatorname{Im} \Phi''(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} \neq 0$, *где* $\Phi(\lambda) = \prod_{k=-n}^{n} (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k})$.

Следствием этих условий является то, что число вещественных собственных значений не превосходит n.

2. Исследование

Мы рассматриваем задачу когда оба конца нити закреплены, а трение приложено к крайней справа массе. Обозначим через l общую длину струны несущей n сосредоточенных масс $m_1, m_2, \dots, m_n$. Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, обозначим через $l_0, l_1, \dots, l_n$ длины участков, на которые точки приложения масс делят нить. Через α обозначим коэффициент вязкого трения, с которым движется масса m_n.

Соответствующая краевая задача имеет вид:

$$\frac{u_k - u_{k+1}}{l_k} + \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - m_k\lambda^2 u_k = 0,\ (k = 1, 2, \dots, n-1) \tag{13}$$

$$u_0 = 0, \tag{14}$$

$$u_{n+1} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{u_n}{l_n} + \frac{u_n - u_{n-1}}{l_{n-1}} + (-m_n\lambda^2 + i\alpha\lambda)u_n = 0. \tag{16}$$

Согласно работе [10] решение реккурентных соотношений (13) имеет вид

$$u_k = R_{2k-2}(\lambda^2)u_1, \tag{17}$$

где R_{2k-2} – некоторый многочлен степени $2k-2$.

Введем согласно [10] многочлены с нечетными индексами:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = \frac{R_{2k}(\lambda^2) - R_{2k-2}(\lambda^2)}{l_k}. \tag{18}$$

Многочлены R_k удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = -\lambda^2 m_k R_{2k-2}(\lambda^2) + R_{2k-3}(\lambda^2),$$

$$R_{2k}(\lambda^2) = l_k R_{2k-1}(\lambda^2) + R_{2k-2}(\lambda^2), \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad R_0(\lambda^2) = 1,\ R_{-1}(\lambda^2) = \frac{1}{l_0}.$$

Учитывая эти равенства, из уравнения (16) получаем

$$R_{2n-3}(\lambda^2) + (-m_n\lambda^2 + \frac{1}{l_n})R_{2n-2}(\lambda^2) + i\alpha\lambda R_{2n-2}(\lambda^2) = 0. \tag{19}$$

Обозначим через $\Phi(\lambda)$ многочлен степени $2n$, стоящий в левой части (19), и будем называть его характеристическим многочленом задачи (13)-(16), так как спектр $\lambda_k\,(k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$ задачи (13)-(16) совпадает с множеством корней функции $\Phi(\lambda)$.

Легко показать, что спектр задачи (13)-(16) совпадает со спектром квадратичного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A, \tag{20}$$

где операторы M, K, A действуют в n-мерном гильбертовом пространстве и имеют следующий вид:

$$M = diag\{m_1, m_2, \dots, m_n\},$$

$$K = diag\{0, 0, \dots, \alpha\},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n-1}} & -\frac{1}{l_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{l_n} & \frac{1}{l_n} \end{pmatrix}.$$

Для операторов, входящих в пучок (20) справедливы неравенства при некотором $\epsilon > 0$:

$$A \geq \epsilon I, \quad M \geq \epsilon I, \quad K \geq 0.$$

Пользуясь общими результатами теории операторных пучков (см., например, [16]) получаем что все собственные значения пучка (20) лежат в замкнутой верхней полуплоскости, однако, исходя из конкретного вида пучка, покажем что все его собственные значения лежат в открытой верхней полуплоскости.

Действительно, пусть есть некоторое собственное значение λ_k на вещественной оси. Соответствующий ему собственный вектор обозначим через Y_k. Тогда из равенства

$$\lambda_k^2 (MY_k, Y_k) - (AY_k, Y_k) - i\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0 \tag{21}$$

следует $\lambda_k (KY_k, Y_k) = 0$.

Ноль не является собственным значением, ввиду строгой положительности оператора A, значит $(KY_k, Y_k) = 0$. Если $Y_k = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, то это означает что $\alpha |u_n|^2 = 0$, откуда $u_n = 0$. Но тогда, из формулы (16) следует что $u_{n-1} = 0$, а из (13), что $u_k = 0$ при всех k, т.е. $Y_k = 0$, что невозможно.

Определение 1. Многочлен принадлежит классу Эрмита-Биллера (HB) если все его нули лежат в открытой верхней полуплоскости [17].

Тогда из вышесказанного следует что многочлен (19) принадлежит классу многочленов Эрмита-Биллера.

Кроме того, из самой формы многочлена (19) видно, что для него выполняется условие симметрии $\Phi(-\bar{\lambda}) = \overline{\Phi(\lambda)}$, т.е. он принадлежит классу симметричных многочленов Эрмита-Биллера и, следовательно для него выполняются условия:

(i) $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$ для $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$;

(ii) $\lambda_{-k} = -\bar{\lambda}_k$ для не чисто мнимых λ_{-k} и кратности симметрично расположенных чисел совпадают.

Теорема 3. *Пусть заданы числа $l > 0$ и $l_n \in (0, l)$. Для того чтобы набор комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ был спектром задачи (13)-(16) с $\sum_{k=0}^{n-1} l_k = l - l_n$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (i) и (ii). Соответствующий $\{\lambda_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$, l и l_n набор положительных чисел $\{\{l_k\}_{k=0}^{n-1}, \{m_k\}_{k=1}^{n}\}$ является единственным.*

Алгоритм восстановления параметров струны

Построим многочлен
$$\Phi(\lambda) = \prod_{-n,k\neq 0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \tag{22}$$
Из симметрии нулей этого многочлена следует что четные многочлены:
$$P(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) + \Phi(-\lambda)}{2} \tag{23}$$
и
$$Q(\lambda^2) = \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda)}{2i\lambda} \tag{24}$$
вещественны.

Коэффициент трения α находим по формуле
$$\alpha = Q(0)\left(\frac{1}{l - l_n} + \frac{1}{l_n}\right). \tag{25}$$

Величину крайней справа демпфированной массы m_n получаем следующим образом:
$$m_n = -\alpha \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{P(\lambda^2)}{\lambda^2 Q(\lambda^2)}. \tag{26}$$
Ввиду того что степень $P(\lambda^2)$ равна $2n$, а степень $Q(\lambda^2)$ равна $2n-2$, предел в правой части (26) существует. Кроме того, нетрудно показать, что
$$m_n = -\alpha \left(i \sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} \lambda_k\right)^{-1}.$$
Отсюда, ввиду условий (i) и (ii) теоремы 3, следует, что $m_n > 0$.

Определение 2. (см. [18]) Функция $\omega(\lambda)$ называется неванлинновской функцией (или R-функцией) если:

(1) она аналитична в полуплоскостях $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda < 0$;

(2) $\omega(\overline{\lambda}) = \overline{\omega(\lambda)}$ ($\mathrm{Im}\lambda \neq 0$);

(3) $\mathrm{Im}\lambda \, \mathrm{Im}\, \omega(\lambda) \geq 0$ для $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$.

Определение 3. (см. [18]) Неванлинновская функция $\omega(\lambda)$ называется S-функцией если $\omega(\lambda) \geq 0$ для $\lambda < 0$.

Легко показать, что функция

$$\frac{\alpha^{-1}\lambda Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)}$$

принадлежит классу S-функций и не имеет полюса в начале координат. Тогда, согласно [10], эту функцию можно разложить в цепную дробь

$$\frac{\alpha^{-1}Q(z)}{P(z) + (m_n z - l_n^{-1})\alpha^{-1}Q(z)} = a_{n-1} + \cfrac{1}{-b_{n-1}z + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{-b_{n-2}z + \ldots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{-b_1 z + \cfrac{1}{a_0}}}}}} \tag{27}$$

с $a_k > 0$ и $b_k > 0$ для всех k.

Мы отождествляем a_k с длиной k-го интервала l_k и b_k с k-ой массой m_k стильтьесовской струны.

Получена характеризация спектра для стильтьесовской струны с конечным числом сосредоточенных масс, закрепленными концами и вязким трением, приложенным к одной из крайних масс. Получен алгоритм восстановления величин точечных масс, длин интервалов между ними и коэффициента трения по спектру колебаний, общей длине струны и длине крайнего интервала.

Список литературы

[1] Аров Д.З. *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сигмента по коэффициенту динамической податливости* // Сибирский мат. ж. – 1975. – Т.16, №.3. – С.440-465.

[2] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны* // Доклады АН СССР – 1979. – Т.247, №.5. – С.1046-1049.

[3] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием* // J. Operator Theory – 1989. – V.22 – P.369-395.

[4] Courant R., Hilbert D. *Metods of mathmatical physics* // Interscience, New York – 1953. – V.1

[5] Pivovarchik V.N., *Direct and inverse problems for demped strings* // J. Operator Theory – 1999. – V.42 – P.189-220.

[6] Filimomov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis F.D. *Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads when n is large.* // C.R. Acad. Sci. Paris, I. – 1991. – V.313 – P. 961 - 965.

[7] Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М. *Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера.* // Прикл. матем. и мех. – 1991. – Т. 55, вып. 6. – С. 989 - 995.

[8] Filimonov A.M., Myshkis A.D. *On properties of large wave effect in ckassical problem bead string vibration.* // J. of Difference Equations and Applications – 2004 – V. 10:13–15 – P. 1171-1175.

[9] Wohlers R.M. *Lumped and distributed passive networks* // Academic Press, New York – 1969.

[10] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осциляционные матрицы и ядра и колебания механических систем* // ГИТТЛ, М. – 1950.

[11] Stieltjes T.-L. *Recherches sur les fractions continues.* // Ann. Fac. Sci. Toulouse – 1894 – V.8 – P.1-122 – 1895 – V.9 – P. 1-47.

[12] Boyko O.P., Pivovarchik V.N. *Inverse problem for Stieltjes string damped at one end* // Methods of Functional Analisys and Topology – 2008 (в печати)

[13] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping. Applicable Analysis, **29** (1988), 1-18.

[14] K. Veselić. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping II. Integral Equations and Operator Theory, **13** (1990), 883-897.

[15] Boyko O., Pivovarchik V.N. *Inverse three spectral problem for a Stieltjes string and inverse problem with one dimensional damping* // Inverse Problems – 2008 – V.24, 015019.

[16] Pivovarchik V.N. *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensinal Linear Part.* // Укр. мат. журн. – 2007 – Т.59, №5 – С. 702-716

[17] Levin B.Ja. *Distribution of zeros of entire functions* // Trans. Math. Monographs, AMS, Providence, RI – 1980 – V.5

[18] Кац И.С., Крейн М.Г. *R-функции - аналитические функции, отображающие полуплоскость в себя. Дополнение 1 в кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.* // М.: Мир – 1968.