Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 3–20.

УДК 517.972: 517.518.24: 517.2: 517.977.5: 517.98

И. В. Баран

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ K-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В статье рассмотрено понятие симметрического компактного субдифференциала n-го порядка. Получены теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K-субдифференциалов. Рассмотрены некоторые приложения.

Ключевые слова: симметрическая производная, симметрический компактный субдифференциал, теорема о среднем, формула Тейлора, абсолютная непрерывность.

E-mail: matemain@mail.ru

Введение

Субдифференциальное исчисление уже достаточно давно является фундаментом выпуклого и негладкого анализа (см., например, [1], [2], [3], [11], [12], [13]). И. В. Орловым несколько лет назад было введено понятие *компактного субдифференциала* или *K-субдифференциала*, которое затем нашло серьезные приложения. В совместных работах с Ф. С. Стонякиным это понятие было подробно изучено для отображений вещественного аргумента в ЛВП, и с его помощью было получено общее топологическое решение проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера ([5], [6],[18]).

В дальнейшем возник вопрос о переносе понятия K-субдифференциала на случай векторного аргумента, что и было сделано в совместных работах И. В. Орлова и З. И. Халиловой (см. [7], [8], [16], [17]). Результаты нашли значимые применения в решении вариационных задач с негладким интегрантом.

Недавно понятие K-субдифференциала было обобщено на симметрический случай. Было введено понятие симметрического K-субдифференциала (или K_s-субдифференциала), обобщающего симметрическую производную, а не обычную. В наших работах [19], [20] изложен основной аппарат теории K_s-субдифференциалов первого и второго порядка для отображений скалярного аргумента. Применение K_s-субдифференциалов вместо симметрических производных в теории рядов Фурье позволило обобщить классический метод Римана-Шварца обобщенного суммирования рядов Фурье.

Данная статья посвящена введению и исследованию K_s-субдифференциалов n-го порядка, а также выводу теоремы о среднем и формулы Тейлора для симметрических производных и K_s-субдифференциалов. Работа состоит из четырех основных разделов. В первом разделе получена формула конечных приращений и доказана теорема о среднем для K_s-субдифференцируемых отображений (теорема 2). В частности, получена теорема о среднем для симметрических производных. Во втором разделе получена формула Тейлора в форме Пеано (теорема 3) для симметрических производных. Также получены варианты формулы Тейлора для четного и нечетного порядка при несколько иных требованиях. В третьем разделе рассмотрены приложения формулы Тейлора для симметрических производных. Наконец, в последнем разделе предыдущие результаты переносятся на случай K_s-субдифференцируемых отображений.

Приведем некоторые вспомогательные сведения, которые будут использованы в работе. Всюду далее мы рассматриваем отображение $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное нормированное пространство.

Напомним определения симметрической производной n-го порядка (см. [4], [23]) и K_s-субдифференциала первого порядка ([19], определение K-предела см. раздел 4).

Определение 1. *Симметрической производной n-го порядка* отображения $f(x)$ в точке x называется величина

$$f^{[n]}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \lim_{h\to +0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big).$$

Определение 2. Назовем *K_s-субдифференциалом первого порядка* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x) = K\text{-}\varliminf_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta \Big\}.$$

1. Формула конечных приращений и теорема о среднем для абсолютно непрерывных K_s-субдифференцируемых отображений и симметрических производных

Вначале получим формулу конечных приращений для K_s-субдифференцируемых отображений.

Определение 3. Отображение $f : [a; b] \to F$ называется (сильно) абсолютно непрерывным на $[a; b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$ такое, что для любого конечного или счетного набора непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}$ из области определения, который удовлетворяет условию $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, выполнено $\sum\limits_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть отображения $f : \mathbb{R} \supset [a; b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a; b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны на $[a; b]$ и K_s-субдифференцируемы на $(a; b)$, причем g возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ выполнена локальная оценка $\partial_K^{[']} f(x) \in \partial_K^{[']} g(x) \cdot B$ $(a < x < b)$, то справедлива глобальная оценка:*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{1}$$

Доказательство. 1) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение K_s-субдифференциала выберем для каждого $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in O_\varepsilon(\partial_K^{[']} g(x) \cdot B); \\ \dfrac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \in O_\varepsilon(\partial_K^{[']} g(x)) \end{cases}$$

(здесь O_ε — ε-окрестность множества в F). Отсюда получаем:

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in O_{2\varepsilon} \left(\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \cdot B \right) \right). \tag{2}$$

2)Система сегментов $\{\overline{O}_\delta(x)\}_{x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]}$, $\delta < \delta(\varepsilon, x)$, очевидно, образует покрытие Витали (см. [4], [14], [15]) множества $[a + \varepsilon; b - \varepsilon]$. По второй теореме Витали о покрытиях ([14]), для любого заданного $\eta > 0$ из данного покрытия можно выделить такую конечную систему сегментов $\left\{\overline{O}_{\delta_i}(x_i)\right\}_{i=1}^n$, что $mes\Big(S = [a+\varepsilon; b-\varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{O}_{\delta_i}(x_i)\Big) < \eta$. Последнее множество S состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_j; \beta_j]$, $j = \overline{1, n+1}$. В силу абсолютной непрерывности отображений f и g на $[a; b]$, можно подобрать такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\Big(mes\, S = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j - \alpha_j) < \eta \Big) \Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \|f(\beta_j) - f(\alpha_j)\| < \varepsilon, \; \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] < \varepsilon \Big). \tag{3}$$

Итак:

$$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i)]+\sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)], \qquad (4)$$

где, в силу (2),

$$f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i)\in 2\delta_i\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\ (i=\overline{1,n}), \qquad (5)$$

и из (3):

$$\sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)]\in O_\varepsilon(0), \quad \sum_{j=1}^{n+1}[g(\beta_j)-g(\alpha_j)]\in(-\varepsilon;\varepsilon). \qquad (6)$$

Подставляя оценки (5) и (6) в (4), с учетом выпуклости B, имеем:

$$\begin{aligned} f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)\in\sum_{i=1}^{n}\left[2\delta_i\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\right]+O_\varepsilon(0)\subset \\ \subset O_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)\cdot B\right)+O_\varepsilon(0)\subset \\ \subset O_\varepsilon\left([(g(b-\varepsilon)+\varepsilon)-(g(a+\varepsilon)-\varepsilon)]\cdot B\right)+O_\varepsilon(0). \end{aligned} \qquad (7)$$

3) Переходя в (7) к пределу при $\varepsilon\to 0$, с учетом замкнутости B, получаем (1). □

Докажем теорему о среднем для для K_s-субдифференцируемых отображений.

Теорема 2. *Пусть отображение $f:\mathbb{R}\supset[x;x+h]\to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и K_s-субдифференцируемо на $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}\partial_K^{[\prime]}f(x+\theta h)\Big)\cdot h. \qquad (8)$$

Доказательство. Достаточно, в условиях теоремы 1, положить $g(\theta)=\theta$ и $B=\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}\partial_K^{[\prime]}f(x+\theta h)\Big)$, а затем применить формулу (1). □

Следствием данной теоремы является теорема о среднем для симметрических производных.

Следствие 1. *Пусть отображение $f:\mathbb{R}\supset[x;x+h]\to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и симметрически дифференцируемо на $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\,f^{[\prime]}\big((x;x+h)\big)\cdot h. \qquad (9)$$

Доказательство. Если $f(x)$ симметрически дифференцируемо, то $\partial_K^{[']} f(x+\theta h) = \left\{ f^{[']}(x+\theta h) \right\}$. Поэтому

$$\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K^{[']} f(x+\theta h) = \left\{ f^{[']}(x+\theta h) \;\Big|\; 0<\theta<1 \right\} = f^{[']}\big((x;x+h)\big).$$

□

2. Формула Тейлора для симметрических производных

Мы получим здесь формулу Тейлора в форме Пеано в предположении, что отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в окрестности точки x и n раз симметрически дифференцируемо в точке x. Прежде чем перейти к основной теореме, сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Имеет место числовое равенство*

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k C_n^k (n-2k)^n = 2^{n-1} n!.$$

Предложение 1. *Если существует $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$, то существует симметрическая производная n-го порядка $f^{[n]}(x)$ в точке x и имеет место равенство:*

$$f^{[n]}(x) = (f^{(n-1)})^{[']}(x). \tag{10}$$

Доказательство. Применим теорему Коши $(n-1)$ раз по переменной h:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \left.\frac{(\Delta^n f(x,h))^{(n-1)}}{((2h)^n)^{(n-1)}}\right|_{\theta h} =$$

$$= \frac{n^{n-1}\cdot \Delta^1 f^{(n-1)}(x, n\theta h) - \dots + C_n^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2^{n-1}\cdot \Delta^1 f^{(n-1)}(x, 2\theta h)}{2^n \cdot n!(\theta h)} =$$

$$= \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}\cdot (n-1)!}\cdot \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, n\theta h)}{2n\theta h} - \frac{(n-2)^n}{2^{n-1}\cdot (n-1)!}\cdot \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, (n-2)\theta h)}{2(n-2)\theta h} + \dots$$

Полученное равенство можно записать в виде:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \beta_{nk}, \tag{11}$$

где $\alpha_{nk} = n-2k$, $\quad \beta_{nk} = (-1)^k C_n^k \dfrac{(n-2k)^n}{2^{n-1}\cdot n!}$. При этом $\displaystyle\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \beta_{nk} = 1$ в силу леммы 1.

Переходя к пределу в (11) при $h \to 0$:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \beta_{nk}\cdot (f^{(n-1)})^{[']}(x) = (f^{(n-1)})^{[']}(x).$$

□

Справедлива следующая формула Тейлора для симметрических производных.

Теорема 3. *Предположим, что существует* $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$ *и отображение* $f(x)$ *абсолютно непрерывно в окрестности* $U(x)$. *Тогда имеет место равенство:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{1}{n!} \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big) \cdot h^n + o(h^n). \tag{12}$$

Доказательство. Из существования $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$ следует, что отображение $f(x)$ определено и имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (12) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co} f^{[']}\big((x; x+h)\big) \cdot h + o(h).$$

Таким образом, получили теорему о среднем для симметрических производных (см. следствие 1).

b) Воспользуемся индукцией по n. Допустим, утверждение теоремы верно для любого $\widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \overline{co} f^{[n-1]}\big((x; x+h)\big) + o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall y_{n-1} \in \overline{co} f^{[n-1]}\big((x; x+h)\big)$ вытекает:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{n-1}$. Введем $\forall y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f, y_n; h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычисляя обычную производную вспомогательной функции r_n, имеем:

$$r_n^{'}(f, y_n; h) = f^{'}(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n,$$

откуда, по допущению индукции следует: $r_n^{'}(f, y_n; h) = r_{n-1}(f', y_{n-1} = y_n; h) = o(h^{n-1})$. Применяя обычную теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получим:

$$r_n(f, y_n; h) \in \overline{co}\Big\{ r_n^{'}(f, y_n; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$.

В связи с этим $f(x+h)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \in \frac{h^n}{n!}y_n+o(h^n)$, где $o(h^n)$ можно считать независящим от выбора $y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x;x+h)\big)$. Таким образом, мы доказали формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. □

Для нечетного порядка справедлива следующая формула Тейлора.

Теорема 4. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x)=(f^{(2n)})^{[']}(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h)-f(x-h)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}+2\frac{f^{[2n+1]}(x)}{(2n+1)!}h^{2n+1}+o(h^{2n+1}). \tag{13}$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n=1$ равенство (13) равносильно определению первой симметрической производной: $f(x+h)-f(x-h)=2f^{[']}(x)\cdot h+o(h)$.

b) Допустим, утверждение теоремы верно для порядка $(2n-1)$:

$$f(x+h)-f(x-h)=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}+\frac{(f^{(2n-2)})^{[']}(x)}{(2n-1)!}h^{2n-1}+o(h^{2n-1}).$$

Введем вспомогательную функцию:

$$r_{2n+1}(f,h)=f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}-\frac{(f^{(2n)})^{[']}(x)}{(2n+1)!}h^{2n+1}.$$

Вычисляя вторую симметрическую производную вспомогательной функции r_{2n+1} по h, получаем:

$$r_{2n+1}^{['']}(f,h)=f^{['']}(x+h)-f^{['']}(x-h)-2\sum_{k=2}^{n}\frac{(f'')^{(2k-3)}(x)}{(2k-3)!}h^{2k-3}-\frac{((f'')^{(2n-2)})^{[']}(x)}{(2n-1)!}h^{2n-1},$$

откуда, по допущению индукции, следует: $r_{2n+1}^{['']}(f,h)=r_{2n-1}(f'',h)=o(h^{2n-1})$.

Сначала применим обычную теорему о среднем:

$$r_{2n+1}(f,h)=r_{2n+1}(f,h)-r_{2n+1}(f,0)\in\overline{co}\;r_{2n+1}^{'}(f,[0;h])\cdot h=\overline{co}\;r_{2n+1}(f^{'},[0;h])\cdot h.$$

Далее по теореме о среднем для симметрических производных:

$$\begin{aligned}\overline{co}\;r_{2n+1}(f^{'},[0;h])\cdot h=\overline{co}\Big\{r_{2n+1}(f^{'},\theta h)\;\Big|\;0<\theta<1\Big\}\cdot h\subset\\ \subset\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\;(r_{2n}^{'})^{[']}(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h=\\ =\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\;r_{2n-1}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h=o(h^{2n-1})\cdot h^2=o(h^{2n+1}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n+1}(f'',h)=o(h^{2n+1})$. Таким образом, мы получили формулу Тейлора (13). □

Аналогично рассмотрим формулу Тейлора в четном случае.

Теорема 5. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = (f^{(2n-1)})^{[']}(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k} + 2\frac{f^{[2n]}(x)}{(2n)!}h^{2n} + o(h^{2n}). \qquad (14)$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n=1$ получим: $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = f^{['']}(x)\cdot h^2 + o(h^2)$, что равносильно определению $f^{['']}(x)$.

b) Допустим, утверждение теоремы верно для порядка $(2n-2)$. Введем вспомогательную функцию:

$$r_{2n}(f,h) = f(x+h) + f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k} - 2\frac{(f^{(2n-1)})^{[']}(x)}{(2n)!}h^{2n}.$$

Вычисляя вторую симметрическую производную вспомогательной функции r_{2n} по h, получаем:

$$r_{2n}^{['']}(f,h) = f^{['']}(x+h) + f^{['']}(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f'')^{(2k-2)}(x)}{(2k-2)!}h^{2k-2} - \frac{((f'')^{(2n-3)})^{[']}(x)}{(2n-2)!}h^{2n-2},$$

откуда, по допущению индукции, следует: $r_{2n}^{['']}(f,h) = r_{2n-2}(f'',h) = o(h^{2n-2})$.
Для оценки $r_{2n}(f,h)$ сначала применим обычную теорему о среднем:

$$r_{2n}(f,h) = r_{2n}(f,h) - r_{2n}(f,0) \in \overline{co}\; r_{2n}^{'}(f,[0;h])\cdot h = \overline{co}\; r_{2n}(f^{'},[0;h])\cdot h.$$

Далее по теореме о среднем для симметрических производных следует, что

$$\begin{aligned}\overline{co}\; r_{2n}(f^{'},[0;h])\cdot h = \overline{co}\Big\{ r_{2n}(f^{'},\theta h) \;\Big|\; 0<\theta<1\Big\}\cdot h \subset \\ \subset \overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\;(r_{2n-1}^{'})^{[']}(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h = \\ = \overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\; r_{2n-2}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h = o(h^{2n-2})\cdot h^2 = o(h^{2n}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n}(f'',h) = o(h^{2n})$. Таким образом, мы получили формулу Тейлора (14). □

3. Приложение: некоторые глобальные свойства симметрических производных

Здесь мы свяжем результаты предыдущего раздела со свойствами обобщенных симметрических производных, введенных и исследованных в работе Р. Джеймса [23]. Вначале введем необходимые понятия и приведем результаты, полученные в [23].

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$. Если существуют постоянные $\beta_0, \beta_2, \cdots, \beta_{2r}$ (зависящие только от x_0) такие, что

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{r} \frac{h^{2k}}{(2k)!}\beta_{2k} = o(h^{2r}),$$

при $h \to 0$, то β_{2r} называется *обобщенной симметрической производной* порядка $2r$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, и обозначается $D^{2r}f(x_0)$.

Если $D^{2k}f(x_0)$ существуют при $0 \leqslant k \leqslant m-1$, определим величину $\theta_{2m}(x_0;h)$ равенством:

$$\frac{h^{2m}}{(2m)!}\theta_{2m}(x_0,h) = \frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)_f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!}D^{2k}f(x_0),$$

и положим

$$\Delta^{2m}f(x_0) = \limsup_{h\to 0} \theta_{2m}(x_0;h),$$
$$\delta^{2m}f(x_0) = \liminf_{h\to 0} \theta_{2m}(x_0;h).$$

Скажем. что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ на $(a;b)$, и

$$\lim_{h\to 0} h\theta_{2m}(x,h) = 0$$

при всех x из $(a;b)/E$, где E не более, чем счетно.

Скажем. что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям B_{2m-2} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ на $(a;b)$, и $D^{2k}f(x)$ не имеет разрывов первого рода $(a;b)$.

Далее через $\Delta^k f$ обозначается конечная разность k-го порядка для f.

Теорема 6. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m-2}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-4}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Теорема 7. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-2}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Аналогичные результаты приведены в [23] для обобщенных симметрических производных нечетного порядка, где автор исходит из разложения:

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=1}^{r} \frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}\beta_{2k-1} = o(h^{2r-1}).$$

Сравнивая результаты теорем 6 и 7 и с результатами, соответственно, теорем из раздела 2, мы приходим к следующим утверждениям, вначале для симметрических производных четного порядка (см. теорему 5).

Теорема 8. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-2} f > 0$ в $\dot U(x)$, то функция $f^{(2m-4)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot U(x)$.*

Теорема 9. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m} f > 0$ в $\dot U(x)$, то функция $f^{(2m-2)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot U(x)$.*

Аналогично, отправляясь от соответствующих результатов [23] в нечетном случае, мы приходим к следующим результатам, связанным с симметрическими производными нечетного порядка (см. теорему 4).

Теорема 10. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-1} и B_{2m-3} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-1} f > 0$ в $\dot U(x)$, то функция $f^{(2m-3)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot U(x)$.*

Теорема 11. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m+1} и B_{2m-1} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m+1} f > 0$ в $\dot U(x)$, то функция $f^{(2m-1)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot U(x)$.*

4. Формула Тейлора для K_s-субдифференциалов

Здесь мы перенесем результаты раздела 2 на случай K_s-субдифференцируемых отображений. Для перехода к основному понятию нам понадобится определение K-предела системы множеств (см. [5], [7]).

Определение 5. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению система замкнутых выпуклых подмножеств E, $U = U(0)$ — произвольная окрестность нуля в E. Непустое множество $B \subset E$ называется K-пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} B_\delta\,, \text{ если :}$$

1) $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0:\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B \subset B_\delta \subset B + U)$;
2) B — компактное множество в E.

Введем понятие K_s-субдифференциала n-го порядка.

Определение 6. Назовем *K_s-субдифференциалом n-го порядка* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}.$$

Напомним, что в работах [19], [20] понятие K_s-субдифференциала было введено для случая $n = 1, 2$. Докажем следующее включение.

Предложение 2. *Если существует $\partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x)$, то существует K_s-субдифференциал n-го порядка $\partial_K^{[n]} f(x)$ и имеет место включение:*

$$\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x).$$

Доказательство. Как показано в доказательстве предложения 1, справедливо равенство:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \beta_{nk}, \tag{15}$$

где $\alpha_{nk} = n - 2k, \quad \beta_{nk} = (-1)^k C_n^k \dfrac{(n-2k)^n}{2^{n-1} \cdot n!}$. По лемме 1

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \beta_{nk} = 1. \tag{16}$$

При этом:

$$\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \in \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\}. \tag{17}$$

В силу выпуклости оценки (17) и равенства (16), имеем:

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \beta_{nk} \in \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\}. \tag{18}$$

Таким образом, из (15) и (18) следует:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} \in \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\},$$

откуда:

$$\overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\} \subset \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n} \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\}.$$

Переходя к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса ([5], [7]), получаем: $\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x)$. □

Получим теперь формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано для K_s-субдифференциалов.

Теорема 12. *Предположим, что существует $\partial_K^{[']} f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x + \theta h) \Big\} + o(h^n). \tag{19}$$

Доказательство. Из существования $\partial_K^{[']} f^{(n-1)}(x)$ следует, что f имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (19) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f\big)(x+\theta h) \Big\} \cdot h + o(h).$$

Таким образом, получаем теорему 2 о среднем для K_s-субдифференциалов.

b) Воспользуемся индукцией по n. Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} \widetilde{f}^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\} + o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall y_{n-1} \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$ имеем:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{n-1}$. Введем $\forall y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f, y_n; h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычислим обычную производную вспомогательной функции r_n:

$$r_n^{'}(f, y_n; h) = f^{'}(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n.$$

Поскольку, $\partial_K^{[']} f^{(n-1)}(x) = \partial_K^{[']}((f')^{(n-1)})(x)$, то по допущению индукции: $r_n^{'}(f, y_n; h) = r_{n-1}(f', y_{n-1} = y_n; h) = o(h^{n-1})$. Применяя обычную теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получим:

$$r_n(f, y_n; h) \in \overline{co}\Big\{ r_n^{'}(f, y_n; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$.

В таком случае $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} y_n + o(h^n)$ при любом выборе

$y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}$. Таким образом, мы получили равенство (19). $\square$

Для нечетного порядка имеет место следующая формула Тейлора.

Теорема 13. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$ и существует $\partial_K^{[']}(f^{(2n)})(x) = \partial_K^{[2n+1]} f(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\partial_K^{[2n+1]} f(x) + o(h^{2n+1}). \quad (20)$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (20) принимает вид: $f(x+h) - f(x-h) \in 2\partial_K^{[']} f(x)\cdot h + o(h)$. Получаем:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in \partial_K^{[']} f(x) + o(1). \quad (21)$$

Поскольку $\partial_K^{[']} f(x) = K\underline{-}\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}$, то

$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ $(0 < h < \delta)$, следует: $\overline{co}\Big\{\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\Big\} \subset \partial_K^{[']} f(x) + O_\varepsilon(0)$.

В частности, $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \in \partial_K^{[']} f(x) + O_\varepsilon(0)$. При этом, вводя многозначное отображение

$$\varphi(\delta) = O_{\varepsilon(\delta)}(0),$$

следует: $\varphi(h) = o(1)$ при $h \to 0$. Таким образом выполнено условие (21).

b) Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющий условию теоремы для порядка для порядка $(2n-1)$:

$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \dfrac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\partial_K^{[2n-1]}\widetilde{f}(x) + o(h^{2n-1})$. Отсюда $\forall y_{2n-1} \in \partial_K^{[2n-1]} f(x)$

вытекает: $\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \dfrac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\widetilde{y}_{2n-1} \in o(h^{2n-1})$, где $o(h^{2n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{2n-1}$. Введем $\forall y_{2n+1} \in \partial_K^{[2n+1]} f(x)$ вспомогательную функцию:

$$r_{2n+1}(f,h) = f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} - 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} y_{2n+1}.$$

Вычисляя обычную вторую производную вспомогательной функции r_{2n+1} по h, имеем:

$$r''_{2n+1}(f,h) = f''(x+h) - f''(x-h) - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-3)!} h^{2k-3} - \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} y_{2n+1},$$

откуда, по допущению индукции, следует:

$r''_{2n+1}(f, y_{2n+1}; h) = r_{2n-1}(f'', \widetilde{y}_{2n-1} = y_{2n+1}; h) = o(h^{2n-1})$.

Применяя дважды обычную теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получим:

$$r_{2n+1}(f'', y_{2n+1}; h) \in \overline{co}\Big\{ r_{2n+1}(f', y_{2n+1}; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h \subset$$
$$\subset \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\,(r''_{2n})(f', [0; \theta h]) \Big\} \cdot h =$$
$$= \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\, r_{2n-1}(f'', [0; \theta h]) \cdot h \Big\} \cdot h = o(h^{2n-1}) \cdot h^2 = o(h^{2n+1}),$$

т. е. $r_{2n+1}(f'', h) = o(h^{2n+1})$. Доказано по индукции, что

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} - 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} y_{2n+1} = o(h^{2n+1}),$$

где оценка «о» не зависит от выбора $\forall y_{2n+1} \in \partial_K^{[2n+1]} f(x)$.
Отсюда

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} = 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} y_{2n+1} + o(h^{2n+1}),$$

следовательно, равенство (20) выполнено. □

Аналогично получим формулу Тейлора в четном случае.

Теорема 14. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$ и существует $\partial_K^{[2n]} f(x) = \partial_K^{[']}(f^{(2n-1)})(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} h^{2k} \in 2\frac{h^{2n}}{(2n)!} \partial_K^{[2n]} f(x) + o(h^{2n}). \tag{22}$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.
а) При $n = 1$ равенство (22) принимает вид:
$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \in 2\partial_K^{['']} f(x) \cdot h^2 + o(h^2)$. В таком случае

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \in \partial_K^{['']} f(x) + o(1). \tag{23}$$

Поскольку $\partial_K^{['']} f(x) = K\text{-}\varliminf_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}$, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ $(0 < h < \delta)$, следует:

$$\overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \Big\} \subset \partial_K^{['']} f(x) + O_\varepsilon(0).$$

В частности, $\dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \in \partial_K^{['']} f(x) + O_\varepsilon(0)$. Отсюда, вводя многозначное отображение

$$\varphi(\delta) = O_{\varepsilon(\delta)}(0),$$

имеем: $\varphi(h) = o(1)$ при $h \to 0$. Таким образом, выполнено условие (23).

b) Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(2n-2)$: $\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x) \in \dfrac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}\partial_K^{[2n-2]}\widetilde{f}(x)+o(h^{2n-2})$.

Тогда $\forall y_{2n-2} \in \partial_K^{[2n-2]}f(x)$ получаем: $\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)-\dfrac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}y_{2n-2} \in o(h^{2n-2})$, где $o(h^{2n-2})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{2n-2} \in \partial_K^{[2n-2]}f(x)$. Введем $\forall y_{2n} \in \partial_K^{[2n]}f(x)$ вспомогательную функцию:

$$r_{2n}(f,h)=f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}-2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}.$$

Вычисляя обычную вторую производную вспомогательной функции r_{2n} по h, имеем:

$$r_{2n}^{''}(f,h)=f^{''}(x+h)-f^{''}(x-h)-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-2)!}h^{2k-2}-\frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}y_{2n},$$

откуда, по допущению индукции, следует:
$r_{2n}^{''}(f,y_{2n};h)=r_{2n-2}(f'',\widetilde{y}_{2n-2}=y_{2n};h)=o(h^{2n-2})$.
Применяя дважды обычную теорему о среднем $(0<\theta<1)$, получим:

$$\begin{aligned}r_{2n}(f'',y_{2n};h) &\in \overline{co}\Big\{r_{2n}(f^{'},y_{2n};\theta h)\ \Big|\ 0<\theta<1\Big\}\cdot h \subset\\ &\subset \overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\ (r_{2n-1}^{''})(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h=\\ &=\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\ r_{2n-2}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h=o(h^{2n-2})\cdot h^2=o(h^{2n}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n}(f'',h)=o(h^{2n})$. Доказано по индукции, что

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}-2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}=o(h^{2n}),$$

где оценка «о» не зависит от выбора $\forall y_{2n} \in \partial_K^{[2n]}f(x)$.
Отсюда

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}=2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}+o(h^{2n}),$$

следовательно, $r_{2n}(f'',h)=o(h^{2n})$. В результате имеет место равенство (22). □

Автор выражает признательность проф. И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Басаева Е. К. *О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов* // Владикавказский математический журнал. – 2006. – *8*, № 4. – С. 6-12.

[2] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. *Обобщенные субдифференциалы и экзостеры* // Владикавказский математический журнал. –2006. – *8*, № 4. – С. 19-31.

[3] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Локальный выпуклый анализ* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 1982. — *19*. — С. 155–206.

[4] Сакс С. *Теория интеграла: Пер. с англ. И. С. Березина, Б. М. Будака и Л. А. Гусарова.* — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. — 496 с.

[5] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — 34. — С. 121–138.

[6] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Предельная форма свойства Радона - Никодима справедлива в любом пространстве Фреше* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — 37. – С. 55–69.

[7] Орлов И. В., Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. — 49. — С. 99–131.

[8] Орлов И. В., Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы в банаховых конусах* // Украинский математический вестник. — 2013. —*10*, № 4. — С. 532–558.

[9] Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1987. — 14. — С. 5–101.

[10] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 — . — Т. 1. — 2001. – 607 с.

[11] Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 416 с.

[12] Пшеничный Б. Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[13] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*: Пер. с англ. А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова. —М.: Мир, 1973. —472 с.

[14] Натансон И. П *Теория функций вещественной переменной.* — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[15] Гурса Э. *Курс математического анализа*: Пер. с франц. А. И. Некрасова. — М.: Гос-е технико-теоретическое изд-во, 1933. — 271 с.

[16] Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам* // Динамические системы. — 2012. —- Т. 2(30), № 3-4. -– С. 115—133.

[17] Халилова З. И. *Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2012. — *25 (64)* , № 2. — С. 140–160.

[18] Стонякин Ф. С. *Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах* // Дисс. к.ф.-м.н., Симферополь, 2011.

[19] Баран И. В. *Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка* // Ученые записки Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. —2013. — Т. 26(65), №1. — С. 16–30.

[20] Баран И. В. *Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье* // Динамические системы. — 2013. —- Т. 3(31), № 3-4. -– С. 201—214.

[21] Davis W. J. *The Radon - Nikodym property* // Seminare d'analyse fonctionelle (Polytechnique) (1973-1974). — exp no. O.-P. 1–12.

[22] Diestel J., Uhl J. J. *Vector Measures.* — Providence, Amer. Math. Soc., 1977.

[23] James R. D. *Generalized nTH primitives* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 76, №1. — P. 149 – 176.

[24] Orlov I. V., Stonyakin F. S. *Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral* // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, №1. — P. 74 – 90.

Теорема про середнє та формула Тейлора для симетричних похідних і симетричних K-субдиференціалів

У статті розглянуто поняття симетричного компактного субдиференціала n-го порядку. Отримані теорема про середне та формула Тейлора для симетричних похідних і симетричних K-субдиференціалів. Розглянуті деякі застосування.

Ключові слова: симетрична похідна, симетричний компактний субдиференціал, теорема про середнє, формула Тейлора, абсолютна неперервність.

Mean value theorem and Taylor formula for symmetric derivatives and symmetric K-subdifferentials

A few years ago in the works [5], [6] *the concept of compact subdifferential (or K-subdifferential) was introduced and then is has found successful application to the vector integration theory and in the calculus of variations.*

Recently, the concept of the K-subdifferential was generalized to the symmetric case. The concept of the symmetric K-subdifferential (or K_s-subdifferential) generalizes symmetric derivative instead of usual one.In the works [19], [20] *the basic tools of the theory of the first and the second order K_s-subdifferentials were researched.*

Our work contains research of n-th order K_s-subdifferentials. Like the case of the usual K-subdifferential, symmetric subdifferential is defined as the following K-limit:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \ \Big| \ 0 < h < \delta \Big\}.$$

In the first section the finite increments formula is received and the following mean value theorem for K_s-subdifferentiable mappings is proved:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K^{[']} f(x+\theta h)\Big) \cdot h.$$

In particular, the following mean value theorem for symmetric derivatives is received:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, f^{[']}\big((x; x+h)\big) \cdot h.$$

The second and third sections contain Taylor formula, first for the symmetric derivatives and then for the K_s-subdifferentiabls. Let's formulate, as an example, the Taylor formula for the K_s-subdifferentiabls.

Theorem. *Let a mapping $f : U(x) \to F$ be absolutely continuous in some neighborhood $U(x)$ of the point $x \in \mathbb{R}$, where F is an arbitrary real Banal space. Suppose that there exists $\partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x)$. Then the following estimate:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\} + o(h^n). \tag{24}$$

is valid.

Note in addition, that n-th order K_s-subdifferential is connected with the right part of (24) *by the inclusion*

$$\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x).$$

Keywords: symmetric derivative, symmetric compact subdifferential, mean value theorem, Taylor formula, absolute continuity.