Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 25 (64). 2012 г. № 1. С. 3-16

УДК 539. 391+514. 764.2

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ЕЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РОЗМАЗАНОЇ» НУЛЬ-СТРУНИ, ЩО РАДІАЛЬНО КОЛАПСУЄ В ПЛОЩИНІ z = 0

Леляков О.П., Карпенко А.С.

Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського, Сімферополь, Україна
E-mail: ansergar@mail.ru

У роботі знайдений розв'язок системи рівнянь Ейнштейна для «розмазаної» замкненої нуль-струни, що радіально колапсує в площині $z = 0$. Так само запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу, який описує рух скалярного поля для «розмазаної» нуль-струни, що радіально колапсує в площині $z = 0$. Знайдено умови, за яких компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля, при стисканні поля в одновимірний об'єкт, асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни.
Ключові слова: нуль-струна, скалярне поле, космологія.

ВСТУП

Струнні теорії, хронологія яких нараховує трохи більше трьох десятків років продовжують очевидно перебувати у стані невпинного розвитку, часом бурхливого а часом і більш спокійного. Цей розвиток підтверджується великою кількістю статей, монографій, праць, конференцій тощо. І хоча існує низка проблем, що виникли на попередніх і на сучасному етапах розвитку, струнні теорії заворожують своїми вже відомими, часто справді красивими результатами, обіцяючи і у подальшому великі можливості та перспективи. Очевидно, що концепція струн і, більш загально, багатовимірних об'єктів і надалі відіграватиме важливу (якщо не сказати центральну) роль у побудові остаточної теорії єдиного опису усіх чотирьох типів фундаментальних взаємодій. Серед різноманітних напрямків у теорії струн окремим і досить важливим є той, котрий охоплює дослідження ролі струнних об'єктів у космології. Як відомо, калібрувальні теорії Великого об'єднання з ідеєю спонтанного порушення симетрії передбачають можливість утворення у процесі фазових переходів у ранньому Всесвіті одновимірних топологічних дефектів – космічних струн. Питання про вплив таких об'єктів, його значимість і конкретні прояви у подальшому розвитку нашого Всесвіту заслуговує на серйозну увагу і дослідження. Даній тематиці у сучасній науковій літературі присвячено чимало статей, і вже утворилися цілі напрямки із застосування космічних струн до тих чи інших проблем сучасної космології, серед яких найбільша увага приділяється струнним механізмам утворення первісних неоднорідностей густини речовини, проблемі чорної матерії, інфляційному сценарію за участю струн та ін. [1 - 7]. У подальшому, із надходженням все нових і нових даних спостережень, зрозуміло, що далеко не всі із цих напрямків витримають перевірку часом. Тим не менше, цілком обнадійливим можна вважати те, що все частіше з'являються роботи, спрямовані на можливе експериментальне виявлення космічних струн [8].

Нуль-струни реалізують границю нульового натягу в теорії струн [5, 7]. Компоненти тензора енергії-імпульсу для нуль-струні мають такий вигляд:

$$T^{mn}\sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} \delta^4\left(x^l - x^l(\tau,\sigma)\right), \tag{1}$$

де індекси m, n, l набувають значень 0, 1, 2, 3, функції $x^m = x^m(\tau,\sigma)$ визначають траєкторію руху нуль-струни, τ і σ – параметри на світовій поверхні нуль-струни, $x^m_{,\tau} = \partial x / \partial \tau$, $g = |g_{mn}|$, g_{mn} – метричний тензор зовнішнього простору, $\gamma = const$.

У циліндричній системі координат

$$x^0 = t,\ x^1 = \rho,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z,$$

функції $x^m(\tau,\sigma)$, які визначають траєкторію руху замкненої нуль-струни, що радіально колапсує в площині $z = 0$, мають такий вигляд:

$$t = \tau,\ \rho = -\tau,\ \theta = \sigma,\ z = 0,\ \tau \in (-\infty; 0]. \tag{2}$$

Можна зазначити, що траєкторія (2), наприклад, реалізується при русі замкненої нуль-струни у просторі-часу Переса, який традиційно описує поле випромінювання з ізотропним тензором енергії-імпульсу.

Для (2) відмінними від нуля будуть такі компоненти тензора енергії-імпульсу (1)

$$T^{00} = T^{11} = -T^{01} = \frac{\gamma}{\sqrt{-g}} \delta(z)\delta(\eta), \tag{3}$$

де $\eta = t + \rho$.

Оскільки для траєкторії руху (2) усі напрямки на гіперповерхностях $z = const$ еквівалентні, то метричні функції $g_{mn} = g_{mn}(t,\rho,z)$, тоді, використовуючи інваріантність квадратичної форми щодо інверсії θ на $-\theta$, одержуємо $g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0$. Так само можна помітити, що квадратична форма простору-часу повинна бути інваріантна щодо інверсії $z \to -z$, тоді

$$g_{mn}(t,\rho,z) = g_{mn}(t,\rho,-z). \tag{4}$$

Наслідком (4) є $g_{03} = g_{13} = 0$. Остаточно, використовуючи свободу вибору систем координат у ЗТВ, частково зафіксуємо її вимогою $g_{01} = 0$. Таким чином, квадратична форма для задачі, що розв'язується, може бути подана так

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \tag{5}$$

де ν, μ, A, B – функції змінних t, ρ, z.

Оскільки траєкторія (2) повинна буди одним із розв'язків рівнянь руху нуль-струни, то можна одержати додаткові умови (зв'язки) на метричні функції, при виконанні яких траєкторія руху нуль-струни, що задається (2), залишається незмінною.

Рух нуль-струні в псевдоримановому просторі визначається такої системою рівнянь:

$$x^m_{,\tau\tau} + \Gamma^m_{pq} x^p_{,\tau} x^q_{,\tau} = 0, \tag{6}$$

$$g_{mn}x^m_{,\tau}x^n_{,\tau}=0\,,\ g_{mn}x^m_{,\tau}x^n_{,\sigma}=0\,, \tag{7}$$

де Γ^m_{pq} – символи Кристофеля. Можна безпосередньо переконатися в тому, що для траєкторії (2) перше з рівнянь (7) для (5), має такий вигляд $e^{2\nu}-A=0$, звідки

$$e^{2\nu}\equiv A\,, \tag{8}$$

а рівняння системи (6), (7), що залишилися, для (2), (5) за умови (8) зводяться до єдиного рівняння $\nu_{,t}-\nu_{,\rho}=0$, звідки

$$\nu=\nu(\eta,z). \tag{9}$$

Тоді згідно (4) маємо

$$\nu(\eta,z)=\nu(\eta,-z). \tag{10}$$

Аналізуючи систему рівнянь Ейнштейна, побудовану для (3), (5), та використовуючи знайдені умови (8) – (10), можна до визначити залежність функцій квадратичної форми (5), а саме

$$B=B(\eta,z),\ \mu=\mu(\eta,z), \tag{11}$$

при цьому, сама система Ейнштейна зводиться до додаткових рівнянь

$$\frac{B_{,\eta\eta}}{B}+2\mu_{,\eta\eta}-2\nu_{,\eta}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}+2\mu_{,\eta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}\right)^2+2\left(\mu_{,\eta}\right)^2=-2\chi T_{00}\,, \tag{12}$$

$$\left(\frac{B_{,z}}{B}\right)_{,z}+\frac{1}{2}\left(\frac{B_{,z}}{B}\right)^2+\frac{B_{,z}}{B}\left(2\nu_{,z}-\mu_{,z}\right)=0\,, \tag{13}$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{B}+2\nu_{,\eta z}-\nu_{,z}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}+2\mu_{,\eta}\right)-\frac{1}{2}\frac{B_{,z}}{B}\left(\frac{B_{,\eta}}{B}+2\mu_{,\eta}\right)=0\,, \tag{14}$$

$$2\nu_{,zz}+4\left(\nu_{,z}\right)^2+\nu_{,z}\left(\frac{B_{,z}}{B}-2\mu_{,z}\right)=0\,, \tag{15}$$

$$\left(\nu_{,z}\right)^2+\nu_{,z}\frac{B_{,z}}{B}=0\,, \tag{16}$$

де $T_{00}=\gamma\,\dfrac{e^{2\nu-\mu}}{\sqrt{B}}\,\delta(\eta)\,\delta(z)$.

Використовуючи знайдені умови (8), (9), (11) для (5), одержуємо

$$dS^2=e^{2\nu}\left((dt)^2-(d\rho)^2\right)-B(d\theta)^2-e^{2\mu}(dz)^2\,, \tag{17}$$

де $\nu=\nu(\eta,z)$, $B=B(\eta,z)$, $\mu=\mu(\eta,z)$. Також можна відзначити, що в (17), згідно з (4), функції $B(\eta,z)$ і $\mu(\eta,z)$ є парними по z, тобто

$$B(\eta,z)=B(\eta,-z),\quad \mu(\eta,z)=\mu(\eta,-z). \tag{18}$$

Надалі, при інтегруванні рівнянь Ейнштейна застосуємо алгоритм запропонований у роботі [8], тобто при інтегруванні рівнянь Ейнштейна будемо розглядати компоненти нуль-струнного тензора енергії-імпульсу як границю розмазаного «розподілу», у якості якого виберемо дійсне безмасове скалярне поле, вимагаючи при цьому, щоб компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля в границі стиску в одновимірний об'єкт асимтотично збігалися з компонентами нуль-струнного тензора енергії-імпульсу.

1. РОЗПОДІЛ ПОТЕНЦІАЛУ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ «РОЗМАЗАНОЇ» НУЛЬ-СТРУНИ

Компоненти тензора енергії-імпульсу для дійсного без масового скалярного поля мають такий вигляд

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L \,, \tag{19}$$

де $L = g^{\omega\lambda}\varphi_{,\omega}\varphi_{,\lambda}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi / \partial\alpha$, φ – потенціал скалярного поля, індекси $\alpha, \beta, \omega, \lambda$ набувають значень 0, 1, 2, 3. Для того, щоб забезпечити само узгодженість рівнянь Ейнштейна для (17), (19), будемо вимагати

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, z) \rightarrow \varphi = \varphi(\eta, z) \,. \tag{20}$$

Розписуючи (19) для (17), (20), одержуємо

$$T_{00} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2 + \frac{e^{2(\nu-\mu)}}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2, \; T_{11} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2 - \frac{e^{2(\nu-\mu)}}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2,$$

$$T_{22} = -\frac{Be^{-2\mu}}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2, \; T_{33} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2, \tag{21}$$

$$T_{01} = \left(\varphi_{,\eta}\right)^2, \; T_{03} = T_{13} = \varphi_{,\eta}\varphi_{,z} \,.$$

Система рівнянь Ейнштейна для (17), (21) може бути представлена у такому вигляді

$$2\nu_{,\eta}\mu_{,\eta} + 2\nu_{,\eta}\frac{B_{,\eta}}{2B} - \mu_{,\eta\eta} - \left(\mu_{,\eta}\right)^2 - \frac{B_{,\eta\eta}}{2B} + \left(\frac{B_{,\eta}}{2B}\right)^2 = \chi\left(\varphi_{,\eta}\right)^2, \tag{22}$$

$$\frac{-B_{,\eta z}}{2B} - \nu_{,\eta z} + \frac{B_{,z}}{2B}\frac{B_{,\eta}}{2B} + \frac{B_{,\eta}}{2B}\nu_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B}\mu_{,\eta} + \mu_{,\eta}\nu_{,z} = \chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,z} \,, \tag{23}$$

$$2\nu_{,zz} + 2\frac{B_{,zz}}{2B} + 2\left(\nu_{,z}\right)^2 - 2\left(\frac{B_{,z}}{2B}\right)^2 - 2\nu_{,z}\mu_{,z} - 2\frac{B_{,z}}{2B}\left(\mu_{,z} - \nu_{,z}\right) = -\chi\left(\varphi_{,z}\right)^2, \tag{24}$$

$$2\nu_{,zz} + 3\left(\nu_{,z}\right)^2 - 2\nu_{,z}\mu_{,z} = -\frac{\chi}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2, \tag{25}$$

$$\left(\nu_{,z}\right)^2 + 2\nu_{,z}\frac{B_{,z}}{2B} = \frac{\chi}{2}\left(\varphi_{,z}\right)^2 . \tag{26}$$

Якщо розглядати систему рівнянь (22) – (26) для розподілу скалярного поля вже сконцентрованому всередині «тонкого» кільця, для якого змінні η і z набувають значень в інтервалі

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta],\ z \in [-\Delta z; \Delta z]\ , \tag{27}$$

де $\Delta\eta$ і Δz – малі позитивні константи, що визначають «товщину» кільця, тобто

$$\Delta\eta << 1,\ \Delta z << 1, \tag{28}$$

і за подальшого стискання такого «тонкого» кільця в одновимірний об'єкт (нуль-струну)

$$\Delta\eta = 0\ ,\ \Delta z = 0\ , \tag{29}$$

то простір, в якому прямує така «розмазана» нуль-струна, і для якого змінні η і z набувають значень в інтервалі $\eta \in (-\infty; +\infty)$, $z \in (-\infty; +\infty)$, умово можна розбити на три області

- область I, для якої

$$\eta \in (-\infty; -\Delta\eta) \cup (\Delta\eta; +\infty),\ z \in (-\infty; +\infty)\ , \tag{30}$$

- область II, для якої

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta],\ z \in (-\infty; -\Delta z) \cup (\Delta z; +\infty), \tag{31}$$

- область III, для якої

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta],\ z \in [-\Delta z; \Delta z], \tag{32}$$

причому, оскільки скалярне поле сконцентроване усередині такого «тонкого» кільця, зумовленого (27) – (29), то в області I, II потенціал скалярного поля дорівнює нулю, а в області III (усередині «тонкого» кільця) $\varphi \neq 0$.

Для отриманих умов розподіл потенціалу скалярного поля зручно подати у вигляді

$$\varphi(z, \eta) = \ln\left\{ \frac{1}{\alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z)} \right\}, \tag{33}$$

де функції $\alpha(\eta)$ й $\lambda(\eta)$ симетричні відносно інверсії η на $-\eta$, тобто

$$\alpha(\eta) = \alpha(-\eta),\ \lambda(\eta) = \lambda(-\eta), \tag{34}$$

функція $\alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z)$ обмежена

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z) \leq 1\ , \tag{35}$$

а потенціал скалярного поля (33), згідно з (35), може набувати значень від

$$\varphi = 0\ ,\quad \text{при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z) = 1\ , \tag{36}$$

і до

$$\varphi \to \infty\ ,\quad \text{при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z) \to 0\ , \tag{37}$$

причому в області I, відповідно до (36)

$$\alpha(\eta) = 1\ ,\ \lambda(\eta) = 0\ . \tag{38}$$

Як приклад, можна навести такий вибір функцій $\alpha(\eta)$ і $f(z)$, які задовольняють знайденим умовам

$$\alpha(\eta) = \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon + (\xi\eta)^2} \right\}, \tag{39}$$

$$f(z) = f_0 \exp\left\{-\psi\left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{(\varsigma z)^2}\right\}\right)\right\}, \tag{40}$$

де константи ξ й ζ визначають розмір («товщину») кільця, усередині якого сконцентроване скалярне поле, за змінними η і z відповідно, а саме, як випливає з (39), (40), при $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$

$$\xi \to \infty\,,\ \varsigma \to \infty\,, \tag{41}$$

а позитивні константи

$$\varepsilon << 1\,,\ \psi >> 1\ , \tag{42}$$

а за подальшого стискання в одновимірний об'єкт, тобто при $\Delta\eta = 0$, $\Delta z = 0$

$$\varepsilon = 0\,,\ \psi \to \infty\,. \tag{43}$$

2. РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЕЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РОЗМАЗАНОЇ» НУЛЬ-СТРУНИ

Для (19) рівняння скалярного поля має вигляд

$$\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{;\beta} = 0\,, \tag{44}$$

де крапка з комою позначає коваріантну похідну. Розписуючи (44) для квадратичної форми (17), і враховуючи (20), одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi_{,z}}{e^{2\mu}}\right) + \frac{\varphi_{,z}}{e^{2\mu}}\left(2\nu_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B} + \mu_{,z}\right) = 0\,. \tag{45}$$

Перший інтеграл (45) є

$$\varphi_{,z} = c_1(\eta)e^{-2\nu}\frac{e^{\mu}}{\sqrt{B}}\,, \tag{46}$$

де $c_1(\eta)$ «константа» інтегрування. Помітимо, що наслідком (10), (18), (34), є симетричність (парність) функції $c_1(\eta)$ щодо зміни η на $-\eta$.

Рівняння (24), (25) легко інтегруються, їх перші інтеграли є

$$\nu_{,z} = c_2(\eta)e^{-2\nu}\frac{e^{\mu}}{\sqrt{B}}\,,\ \frac{B_{,z}}{B} = c_3(\eta)e^{-2\nu}\frac{e^{\mu}}{\sqrt{B}}\,, \tag{47}$$

де $c_2(\eta)$ й $c_3(\eta)$ – «константи» інтегрування. Розглядаючи разом рівності (46), (47) можна отримати зв'язок метричних функцій $\nu(\eta, z)$ й $B(\eta, z)$ з потенціалом скалярного поля $\varphi(\eta, z)$, а саме

$$\nu_{,z} = \frac{c_2(\eta)}{c_1(\eta)}\varphi_{,z}\,,\ \frac{B_{,z}}{B} = \frac{c_3(\eta)}{c_1(\eta)}\varphi_{,z}\,, \tag{48}$$

звідки

$$\nu(z,\eta)=\frac{c_2(\eta)}{c_1(\eta)}\varphi+\nu_0(\eta),\ B(z,\eta)=\beta(\eta)\exp\left\{\frac{c_3(\eta)}{c_1(\eta)}\varphi\right\}, \tag{49}$$

де $\nu_0(\eta)$ й $\beta(\eta)$ – «константи» інтегрування. Використовуючи (46), (49), можна знайти зв'язок метричної функції $\mu(\eta,z)$ з потенціалом скалярного поля

$$e^{\mu(z,\eta)}=\frac{\sqrt{\beta(\eta)}}{c_1(\eta)}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{4\tilde{c}_2+\tilde{c}_3}{c_1(\eta)}\varphi(z,\eta)+4\nu_0(\eta)\right)\right\}\varphi_{,z}. \tag{50}$$

Використовуючи (48) для (26), одержуємо рівність, що зв'язує між собою функції $c_1(\eta)$, $c_2(\eta)$ и $c_3(\eta)$:

$$\left(\frac{c_2(\eta)}{c_1(\eta)}\right)^2+\frac{c_2(\eta)}{c_1(\eta)}\frac{c_3(\eta)}{c_1(\eta)}=\frac{\chi}{2}. \tag{51}$$

Для (49), (50) рівняння (23) приймає такий вигляд

$$\varphi_{,z}\left(2c_{2_{,\eta}}+c_{3_{,\eta}}-2c_2(\eta)\frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)}-2\nu_{0_{,\eta}}(c_3+2c_2)\right)=0. \tag{52}$$

Оскільки рівність (52) повинна бути виконаною для всіх $\eta\in(-\infty;+\infty)$ й $z\in(-\infty;+\infty)$, то

$$c_{3_{,\eta}}+2c_{2_{,\eta}}-2c_2(\eta)\frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)}-2\nu_{0_{,\eta}}(c_3(\eta)+2c_2(\eta))=0. \tag{53}$$

У зв'язку з тим, що потенціал скалярного поля при $\Delta\eta<<1$ й $\Delta z<<1$ відмінний від нуля тільки в малому околі кола $\eta=0$, $z=0$, а в границі стиску в одновимірний об'єкт (при $\Delta\eta=0$, $\Delta z=0$) відмінний від нуля тільки при $\eta=0$, $z=0$, то наслідком (49), (50) можна вважати

$$\frac{c_2(\eta)}{c_1(\eta)}=\tilde{c}_2,\ \frac{c_3(\eta)}{c_1(\eta)}=\tilde{c}_3, \tag{54}$$

де $\tilde{c}_2$ й $\tilde{c}_3$ – константи, які зв'язані, згідно з (74), співвідношенням

$$(\tilde{c}_2)^2+\tilde{c}_2\tilde{c}_3=\frac{\chi}{2}. \tag{55}$$

Інтегруючи (55) для (54) знаходимо

$$\frac{e^{2\nu_0}}{c_1(\eta)}=\frac{(\beta(\eta))^{-c}}{c_0}, \tag{56}$$

де $c_0=const$,

$$c=\frac{2\tilde{c}_2}{\tilde{c}_3+2\tilde{c}_2}. \tag{57}$$

Дифференцюючи по η рівності (49), (50) з урахуванням (54), одержуємо

$$\nu_{,\eta} = \nu_{0_{,\eta}} + \tilde{c}_2\varphi_{,\eta}\,,\ \frac{B_{,\eta}}{B} = \frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)} + \tilde{c}_3\varphi_{,\eta}\,,$$

$$\mu_{,\eta} = \frac{1}{2}\frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)} - \frac{c_{1_{,\eta}}}{c_1(\eta)} + 2\nu_{0_{,\eta}} + \frac{\varphi_{,z\eta}}{\varphi_{,z}} + \left(\frac{1}{2}\tilde{c}_3 + 2\tilde{c}_2\right)\varphi_{,\eta}\,. \qquad (58)$$

Помітимо, що в області $\varphi = 0$ (тобто по за областю, де сконцентроване скалярне поле), рівності (58) приймають вигляд

$$\nu_{,\eta} = \nu_{0_{,\eta}}\,,\ \frac{B_{,\eta}}{B} = \frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)},\ \mu_{,\eta} = \frac{1}{2}\frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)} - \frac{c_{1_{,\eta}}}{c_1(\eta)} + 2\nu_{0_{,\eta}}\,. \qquad (59)$$

Для (56), (59) (тобто в області $\varphi = 0$) рівняння (22) може бути представлено у такому вигляді

$$\left(\ln(\beta(\eta))\right)_{,\eta\eta} - \frac{c_{1_{,\eta}}}{c_1(\eta)}\left(\ln(\beta(\eta))\right)_{,\eta} + \frac{1}{2(1-c)}\left(\left(\ln(\beta(\eta))\right)_{,\eta}\right)^2 = 0\,. \qquad (60)$$

Перший і другий інтеграл рівняння (60) відповідно є

$$(\beta(\eta))^{-\frac{1-2c}{2(1-c)}}\beta_{,\eta} = \eta_0 c_1(\eta),\ \beta(\eta) = \left(\eta_1 + \frac{\eta_0}{2(1-c)}\int c_1(\eta)d\eta\right)^{2(1-c)}, \qquad (61)$$

де η_0 й η_1 – константи інтегрування.

Згідно з (18), (49) функція $\beta(\eta)$ – позитивно визначена, симетрична щодо зміни η на $-\eta$ функція, що визначає гравітаційне поле в області де $\varphi = 0$. Функція $\int c_1(\eta)d\eta$ (первісна функції $c_1(\eta)$) є непарною, тому для того, щоб (61) функція $\beta(\eta)$ була симетричною (парною), необхідно покласти $\eta_1 = 0$, також фіксуючи в (61) $\eta_0 = 2(1-c)$, одержуємо

$$\beta(\eta) = \left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^{2(1-c)}. \qquad (62)$$

Використовує (62) для (56), знаходимо вираз, що зв'язує функції $\nu_0(\eta)$ й $c_1(\eta)$

$$e^{2\nu_0(\eta)} = \frac{c_1(\eta)}{c_0}\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^{2c(c-1)}. \qquad (63)$$

Після того, як ми отримали рівності (62), (63) залишилися неясними критерії фіксації функції $c_1(\eta)$, а також констант $\tilde{c}_2$ й $\tilde{c}_3$. Для визначення даних умов зручно розглянути рівняння (22) при

$$\eta \to 0\,,\ z \to 0\,,\ \Delta\eta << 1,\ \Delta z << 1\,, \qquad (64)$$

тобто у деякому малому околі кола $\eta = 0$, $z = 0$, що перебуває у середені області, де сконцентроване скалярне поле. Помітимо, що для (64), з урахуванням (53), (55), (56), (58) функція $\mu_{,\eta}$ приймає вигляд

$$\mu_{,\eta} = \left(\frac{1}{2} - c\right)\frac{\beta_{,\eta}}{\beta(\eta)} + \left(\frac{1}{2}\tilde{c}_3 + 2\tilde{c}_2 + 1\right)\varphi_{,\eta}. \tag{65}$$

Для (58), (62), (63), (65) рівняння (22) є

$$\begin{gathered} 2c_4\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)_{,\eta} - 2\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)\left\{\frac{c_{1,\eta}}{c_1(\eta)}c_4 - 2c_5\frac{c_1(\eta)}{\int c_1(\eta)d\eta}\right\} - \\ -\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)^2\left\{\tilde{c}_3^{\,2} + 4(\tilde{c}_3 + \tilde{c}_2) + 2 + 2\chi\right\} = 0 \end{gathered}, \tag{66}$$

де $c_4 = \tilde{c}_3 + 2\tilde{c}_2 + 1$, $c_5 = (1-c)(1 - c + \tilde{c}_3 - 4c\tilde{c}_2)$. Так в як отру манному рівнянні функція $\alpha(\eta)$ визначена, наприклад рівністю (39), то (66) зв'язує між собою функції $c_1(\eta)$, $\alpha(\eta)$ і константи $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$.

Оскільки для випадку (64) вираз $\left(\alpha_{,\eta}/\alpha(\eta)\right) \neq 0$, то рівняння (66), може бути подане як

$$\begin{gathered} 2c_4\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)_{,\eta}\Bigg/\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)^{-1}\left\{\frac{c_{1,\eta}}{c_1(\eta)}c_4 - 2c_5\frac{c_1(\eta)}{\int c_1(\eta)d\eta}\right\} - \\ -\left\{\tilde{c}_3^{\,2} + 4(\tilde{c}_3 + \tilde{c}_2) + 2 + 2\chi\right\} = 0 \end{gathered}, \tag{67}$$

Помітимо, що при

$$\eta \to 0,\ \Delta\eta \to 0, \tag{68}$$

згідно з (39), (41) й (43)

$$\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)_{,\eta}\Bigg/\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)^2 \to 0,\quad \left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)^{-1} \to 0. \tag{69}$$

Тоді для виконання (67) у деякому малому околі поверхні $\eta = 0$, при $\Delta\eta \to 0$, необхідно вимагати:

$$\left(\frac{c_{1,\eta}}{c_1(\eta)}c_4 - 2c_5\frac{c_1(\eta)}{\int c_1(\eta)d\eta}\right)\Bigg/\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right) \to 0, \tag{70}$$

$$\tilde{c}_3^2 + 4(\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3) + 2 + 2\chi = 0, \tag{71}$$

причому умова (70) дає обмеження на вибір функції $c_1(\eta)$, а (71) ще одна рівність, що зв'язує константи $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$.

Помітимо, що рівність (71), з урахуванням (55), набуває вигляду

$$\tilde{c}_2\left(\tilde{c}_3^2 + 2 + 2\chi\right) = -2\chi, \tag{72}$$

Звідки випливає, що константа $\tilde{c}_2$ негативна, тобто

$$\tilde{c}_2 < 0. \tag{73}$$

Розглядаючи разом (55) й (72) отримуємо рівняння на константу $\tilde{c}_3$

$$\tilde{c}_3^4 + 4\tilde{c}_3^3 + 4(1+\chi)\tilde{c}_3^2 + 8(1+\chi)\tilde{c}_3 + 4(1+\chi+\chi^2) = 0 . \qquad (74)$$

Помітимо, що всі коефіцієнти отриманої рівності позитивні. Оскільки в рівнянні Ейнштейна константа $\chi << 1$, то для оцінки знака константи $\tilde{c}_3$, рівняння (74) можна подати у вигляді

$$\tilde{c}_3^4 + 4c_3^3 + 4\tilde{c}_3^2 + 8\tilde{c}_3 + 4 = 0 . \qquad (75)$$

Рівняння (75) має два дійсні корені $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Тоді дійсні корені рівняння (74) є

$$\tilde{c}_{3_{1,2}} = -2 \pm \sqrt{2} + \delta_{1,2} , \qquad (76)$$

де $\delta_{1,2}$ – погрішності. Підставляючи (99) у (97), у лінійному наближенні знаходимо

$$\delta_1 \approx -\frac{2}{3}\chi^2 , \; \delta_2 \approx \frac{\chi}{2} . \qquad (77)$$

Наслідком (76), (77) є

$$\tilde{c}_3 < 0 . \qquad (78)$$

Помітимо, що для отриманих оцінок (73), (78) значення константи c (рівність (57)) позитивно, тобто

$$c = \frac{2\tilde{c}_2}{\tilde{c}_3 + 2\tilde{c}_2} > 0 . \qquad (79)$$

Позначимо

$$\frac{c_{1,\eta}}{c_1(\eta)} c_4 - 2c_5 \frac{c_1(\eta)}{\int c_1(\eta) d\eta} = \psi(\eta) , \qquad (80)$$

де згідно з (70), функція $\psi(\eta)$ задовольняє рівності

$$\psi(\eta) / \left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)} \right) \to 0 . \qquad (81)$$

Перший інтеграл рівняння (81) є

$$\frac{c_1(\eta)}{\left(\int c_1(\eta) d\eta\right)^{2\frac{c_5}{c_4}}} = c_6 e^{\frac{1}{c_4}\int \psi(\eta) d\eta} , \qquad (82)$$

де c_6 – константа інтегрування. Для подальшого інтегрування (82) необхідно оцінити константу c_5/c_4 . Згідно з (57), (72), (76), (79)

$$|\tilde{c}_2| << |\tilde{c}_3| , \; c << |\tilde{c}_3| , \; c << 1 , \qquad (83)$$

тоді враховуючи (66), (83) можна записати

$$c_4 \approx \tilde{c}_3 + 1 , \quad c_5 \approx \tilde{c}_3 + 1 , \text{ звідки } c_5/c_4 \approx 1 . \qquad (84)$$

Інтегруючи (82), знаходимо

$$\int c_1(\eta)d\eta = (-1)^{c_6}\left(\int e^{\frac{1}{c_4}\int\psi(\eta)d\eta}d\eta\right)^{-c_6}, \tag{85}$$

де зафіксоване

$$c_6 = \left(2\frac{c_5}{c_4}-1\right)^{-1}. \tag{86}$$

Диференціюючи (85) по η, з урахованням парності функції $c_1(\eta)$, одержуємо

$$c_1(\eta) = (-1)^{c_6+1}c_6 e^{\frac{1}{c_4}\int\psi(\eta)d\eta}\left(\left(\int e^{\frac{1}{c_4}\int\psi(\eta)d\eta}d\eta\right)^2\right)^{-(c_6+1)/2}. \tag{87}$$

Використовуючи (71), представимо рівняння (67) у вигляді при

$$\frac{c_{1,\eta}}{c_1(\eta)} - 2\frac{c_5}{c_4}\frac{c_1(\eta)}{\int c_1(\eta)d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)\Bigg/\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right). \tag{88}$$

Порівнюючи (80) й (88), одержуємо загальний вираз для функції $\psi(\eta)$ (зв'язок функції $\alpha(\eta)$, що задається, наприклад рівністю (62), і функції $\psi(\eta)$)

$$\psi(\eta) = c_4\left(\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)\Bigg/\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right)\right). \tag{89}$$

Використовуючи (54), (56), (62), (63), знаходимо вираз для метричних функцій (49), (50)

$$e^{2\nu(z,\eta)} = \frac{c_1(\eta)}{c_0}\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{c(c-1)}\exp\{2\widetilde{c}_2\varphi(z,\eta)\}, \tag{90}$$

$$B(z,\eta) = \left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{1-c}\exp\{\widetilde{c}_3\varphi(z,\eta)\}, \tag{91}$$

$$e^{2\mu(z,\eta)} = \frac{1}{c_0^2}\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{(1-c)(1-2c)}(\varphi_{,\eta})^2\exp\{(\widetilde{c}_3+4\widetilde{c}_2)\varphi(z,\eta)\}, \tag{92}$$

де функції $c_1(\eta)$ і $\psi(\eta)$ визначаються рівностями (87), (89).

Для характеристики простору який породжує «розмазана» нуль-струна й обумовленого функціями (90) – (92), зручно виписати вираз для скалярної кривизни $K = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\beta\nu}$ яка враховуючи (24) – (26) і рівність (92), може бути подана у вигляді

$$K = -\frac{\chi}{e^{2\mu(z,\eta)}}(\varphi_{,\eta})^2 = -\chi\frac{c_0^2\exp\{|\widetilde{c}_3+4\widetilde{c}_2|\varphi(z,\eta)\}}{\left(\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2\right)^{(1-c)(1-2c)}}. \tag{93}$$

Для (39) функція $\psi(\eta)$, яка обумовлена рівністю (89) приймає вигляд

$$\psi(\eta) = c_4\left(\frac{1}{\eta} - \frac{4\xi^2\eta}{\varepsilon + (\xi\eta)^2}\right). \tag{94}$$

Для (94)

$$e^{\frac{1}{c_4}\int\psi(\eta)d\eta} = \frac{|\eta|}{\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2}, \quad \int e^{\frac{1}{c_4}\int\psi(\eta)d\eta}d\eta = -\frac{\pm 1}{2\xi^2\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)} \tag{95}$$

де вибирається знак «+» для $\eta > 0$ і знак «-» для $\eta < 0$. Застосовуючи (95) для (110), (89), одержуємо

$$\left(\int c_1(\eta)d\eta\right)^2 = (2\xi)^{2c_6}\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{c_6}, \tag{96}$$

$$c_1(\eta) = (-1)^{c_6+1}c_6\left(2\xi^2\right)^{c_6+1}|\eta|\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{\frac{c_6-1}{2}}. \tag{97}$$

Для (96), (97) функції (90) – (93) є

$$e^{2\nu(\eta,z)} = \frac{(-1)^{c_6+1}c_6}{c_0}\left(2\xi^2\right)^{c_7}|\eta|\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{c_8}e^{2\tilde{c}_2\varphi(\eta,z)}, \tag{98}$$

$$B(\eta,z) = \left(2\xi^2\right)^{2c_6(1-c)}\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{c_6(1-c)}e^{\tilde{c}_3\varphi(\eta,z)}, \tag{99}$$

$$e^{2\mu(\eta,z)} = \frac{(\varphi_{,z})^2}{c_0^{\,2}}\left(2\xi^2\right)^{2c_9}\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{c_9}e^{(\tilde{c}_3+4\tilde{c}_2)\varphi(\eta,z)}, \tag{100}$$

$$K = -\chi c_0^{\,2}\frac{e^{|\tilde{c}_3+4\tilde{c}_2|\varphi(\eta,z)}}{\left(2\xi^2\right)^{2c_9}\left(\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\right)^{c_9}}, \tag{101}$$

де $c_7 = c_6(2c(c-1)+1)+1$, $c_8 = c_6c(c-1)+(c_6-1)/2$, $c_9 = (1-c)(1-2c)c_6$.

З (101) випливає, що для випадку «розмазаної» нуль-струни, чому відповідають обмежені (скінченні) значення констант $\xi,\zeta,\varepsilon,\psi$, які визначають розподіл скалярного поля (33), (39), (40), скалярна кривизна – визначена, безперервна і обмежена функція для всіх значень змінних z,η.

Оскільки $e^{2\nu(\eta,z)}$ – позитивна функція, то наслідком (98) може бути

$$c_0 = (-1)^{c_6+1}c_6. \tag{102}$$

Використовуючи (107) для (109), одержуємо

$$c_6 \approx 1, \tag{103}$$

тоді для (83), (103)

$$c_7 \approx 2,\ c_8 \approx 0,\ c_9 \approx 1,\ c_0 \approx 0. \tag{104}$$

Для (104) рівності (98) – (101) приймають вигляд

$$e^{2\nu(z,\eta)} \approx 4\xi^4|\eta|\exp\{2\tilde{c}_2\varphi(z,\eta)\}, \tag{105}$$

$$B(z,\eta) \approx 4\xi^4\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2\exp\{\tilde{c}_3\varphi(z,\eta)\}, \tag{106}$$

$$e^{2\mu(z,\eta)} \approx \left(\varphi_{,\eta}\right)^2 4\xi^4 \left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2 \exp\left\{\left(\widetilde{c}_3 + 4\widetilde{c}_2\right)\varphi(z,\eta)\right\}, \tag{107}$$

$$K \approx -\chi \frac{\exp\left\{\left|\widetilde{c}_3 + 4\widetilde{c}_2\right|\varphi(z,\eta)\right\}}{4\xi^4\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2}. \tag{108}$$

Можна помітити, що оскільки, згідно з (66), (78), константи $\widetilde{c}_2$, $\widetilde{c}_3$ – негативні, а при $\eta = 0$, $z = 0$, $\Delta\eta = 0$, $\Delta z = 0$ потенціал скалярного поля (33) прагне до $+\infty$, то для функції квадратичної форми (17) (рівності (90) – (92)) і виразу скалярної кривизни (93) при $\Delta\eta = 0$, $\Delta z = 0$

$$\left(e^{2\nu(z,\eta)}, B(z,\eta), e^{2\mu(z,\eta)}\right) = 0\,,\ K \to -\infty\,. \tag{109}$$

На наш погляд, той факт, що в границі стиску скалярного поля в одновимірний об'єкт на колі: $\eta = 0$, $z = 0$ скалярна кривизна $K \to -\infty$, не є недоліком наведеного роз'язку, а є наслідком граничного переходу від «розмазаного» об'єкта до одновимірного, то скоріше вказує на неадекватність математичного формалізму, застосованого для опису нуль-струни.

Також помітимо, що для наведеного прикладу вибору функції $\alpha(\eta)$ при $\Delta\eta << 1$, $\Delta z << 1$ в області, де потенціал скалярного поля дорівнює нулю, рівність (108) приймає вигляд

$$K \approx -\frac{\chi}{4\xi^4\left(\varepsilon + (\xi\eta)^2\right)^2}\,, \tag{110}$$

тоді в границі $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$, згідно з (41), в області $\eta \in \left(-\infty; -\Delta\eta\right) \cup \left(\Delta\eta; +\infty\right)$, маємо

$$K = 0\,. \tag{111}$$

ВИСНОВКИ

У наведеній роботі знайдений розв'язок системи рівнянь Ейнштейна для «розмазаної» замкненої нуль-струни, що радіально колапсує у площині $z = 0$. Так само порівнюючи систему рівнянь Ейнштейна для розподілу потенціалу дійсного, безмасового скалярного поля, яке сконцентроване всередині тонкого кільця із системою рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни, що радіально колапсує у площині $z = 0$, ми одержали умови на потенціал скалярного поля, за яких, при стисканні скалярного поля в одновимірний об'єкт, компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни, яка прямує за тією ж траєкторією. Запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу, який описує рух скалярного поля, сконцентрованого усередині тонкого кільця, що радіально колапсує у площині $z = 0$, та наведений приклад розподілу потенціалу скалярного поля, який задовольняє знайденим умовам.

Список літератури

1. Vilenkin A. Cosmic string and domain walls / Vilenkin A. // Phys. Repots – 1985. – Vol. 121 – P. 263-271.
2. Kibble T. W. B. Cosmic string / Kibble T. W. B., Hindmarsh M. B. – 1994. – 138 p. – (e-print: arXiv:hep-ph/9411342v1).
3. Peebles P. S. E. Principles of physical cosmology / Peebles P. S. E. – Prinston University Press, 1994. – 850 p.
4. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и космология / Линде А. Д. – М. : Наука, 1990. – 275 с.
5. Roshchupkin S. N. Fridman Universes and exactly solution on string cosmology / Roshchupkin S. N., Zheltuhin A. A. // Class. Quantum. Grav. – 1995. – Vol. 12. – P. 2519-2524.
6. Vilenkin A. Cosmic string and other topological defects / Vilenkin A., Shellard E. P. S. – Cambridge University Press, 1994. – 534 p.
7. Меерович Б. Э. Гравитационные свойства космических струн / Меерович Б. Э. // УФН. – 2001. – Т. 171, №10. – С. 1033-1049.
8. Арифов Л. Я. Динамика струн и нуль-струн в поле гравитационных волн / Арифов Л. Я., Леляков А. П., Рощупкин С. Н. // Украинский физический журнал. – 1998. – Т. 43. – С. 890-895.

Леляков А. П. Решение системы уравнений Эйнштейна для «размазанной» нуль-струны, которая радиально коллапсирует в плоскости z = 0 / Карпенко А. С., Леляков А. П. // Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 3-16.
В работе найдено решение системы уравнений Эйнштейна для «размазанной» замкнутой нуль-струны, которая коллапсирует в плоскости $z = 0$. Также предложен общий вид распределения потенциала, который описывает движение скалярного поля «размазанной» нуль-струны, радиально коллапсирующей в плоскости $z = 0$. Найдены условия, при которых компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля, при сжатии поля в одномерный объект, асимптотически сближаются с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны.
Ключевые слова: нуль-струна, скалярное поле, космология.

Lelyakov O. P. A solution of the Einstein equations for a ‘thick’ null-string collapsing on radius in the plane z = 0 / Lelyakov O. P., Karpenko A. S. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2012. – Vol. 25(64), No 1. – P. 3-16.
A solution of the Einstein equations for a ‘thick’ null-string collapsing on radius in the plane $z = 0$, are found. The general form of the scalar field potential distribution for a ‘thick’ null-string collapsing on radius in plane $z = 0$ is proposed. The conditions, under which a contraction of the field to the one-dimensional object results in asimtotic coincidence components of the energy-momentumm tensor of a scalar fiald with those of a closed null-string moving on the same trajectory, are found.
Keywords: null-string, scalar field, cosmology.

Поступила в редакцию 03.04.2012 г.