Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 1–6.

УДК 519.4

М. В. Ахрамович

ПОДОБИЕ ПАР q – КОММУТИРУЮЩИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ

В работе доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары матриц (A, B), удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA, \ q \in \mathbb{C}, \ q \neq 0 \end{cases},$$

является "дикой" задачей.

Ключевые слова: подобие матриц, невырожденная матрица, "дикая" задача.

Введение

Классификация произвольных наборов матриц $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ с точностью до преобразования подобия - одна из самых старых задач линейной алгебры. Эта задача является сложной ("дикой") уже для двух матриц (A, B) общего вида. Поэтому на рассматриваемые матрицы накладываются различные условия, такие, как коммутируемость, нильпотентность и т.п. При выполнении некоторых условий задача классификации поддается решению (становится "ручной"). Другие условия, тем не менее, оставляют задачу "дикой" (см., напр., [3]).

В работе [1] была доказана "дикость" задачи классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных матриц (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, связанных соотношением q-коммутации: $BA = qAB$, где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, а в работе [2] — что "дикой" является и задача классификации пары коммутирующих нильпотентных матриц (A, B), $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$. В данной работе доказывается "дикость" задачи классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных матриц (A, B), $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношениями: $AB^2 = 0, \ AB = qBA$, где $q \in \mathbb{C}, \ q \neq 0$.

q-КОММУТИРУЮЩИЕ ПАРЫ МАТРИЦ

Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Для произвольной пары матриц (A, B) из $\mathbf{M}_n(K)$ построим матрицы

$$C = \begin{pmatrix} I & 0 & I & I & I \\ 0 & I & I & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} d_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 I \end{pmatrix},$$

где все клетки из $\mathbf{M}_n(K)$ и $d_1, \ldots, d_5$ — ненулевые попарно различные комлексные числа. Рассмотрим следующие матрицы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_3 \\ 0 & 0 & q\mathcal{B}_1 \end{pmatrix}, \; q \in \mathbb{C}, \; q \neq 0,$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{B}_3 = (0 \; C \; 0)\,.$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Предложение 1. *Матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют соотношениям:*

1. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0$.
2. $\mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0$.
3. $\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}$.

Пусть $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)$ — другая пара матриц из $\mathbf{M}_n(K)$. Тогда, аналогичным образом, по паре $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)$ построим матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ с таким же разбиением на блоки.

Теорема 1. *Пары матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{B}})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны пары матриц (A, B) и $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$.*

Доказательство. Необходимость Пусть матрица $\mathcal{S}$ определяет подобие $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{B}})$. Тогда

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases}.$$

Найдем вид матрицы $\mathcal{S}$. Пусть

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} \\ \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\mathcal{S}\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&0&\mathcal{S}_{11}\\0&0&\mathcal{S}_{21}\\0&0&\mathcal{S}_{31}\end{pmatrix},\ \widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}=\begin{pmatrix}\mathcal{S}_{31}&\mathcal{S}_{32}&\mathcal{S}_{33}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда из условия $\mathcal{S}\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}$ следует система равенств: $\mathcal{S}_{31}=\mathcal{S}_{32}=\mathcal{S}_{21}=0$, $\mathcal{S}_{11}=\mathcal{S}_{33}$, откуда получаем, что

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix}\mathcal{S}_{11}&\mathcal{S}_{12}&\mathcal{S}_{13}\\0&\mathcal{S}_{22}&\mathcal{S}_{23}\\0&0&\mathcal{S}_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{S}_{1}&\mathcal{S}_{2}&\mathcal{S}_{3}\\0&\mathcal{S}_{4}&\mathcal{S}_{5}\\0&0&\mathcal{S}_{1}\end{pmatrix}.$$

Подставляя матрицу $\mathcal{S}$ в равенство $\mathcal{S}\mathcal{B}=\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases}\mathcal{S}_1\mathcal{B}_1=\widetilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_1\\ \widetilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_2=0\\ \mathcal{S}_1\mathcal{B}_2+\mathcal{S}_2\mathcal{B}_3+q\mathcal{S}_3\mathcal{B}_1=\widetilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_3+\widetilde{\mathcal{B}}_2\mathcal{S}_1\\ \mathcal{S}_4\mathcal{B}_3+q\mathcal{S}_5\mathcal{B}_1=\widetilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1\end{cases}. \tag{1}$$

Из первого равенства системы (1) имеем

$$\mathcal{S}_1\mathcal{B}_1=\begin{pmatrix}0&0&S_{11}^{(1)}\\0&0&S_{21}^{(1)}\\0&0&S_{31}^{(1)}\end{pmatrix},\ \widetilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_1=\begin{pmatrix}S_{31}^{(1)}&S_{32}^{(1)}&S_{33}^{(1)}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

откуда получаем: $S_{31}^{(1)}=0,\ S_{32}^{(1)}=0,\ S_{21}^{(1)}=0,\ S_{11}^{(1)}=S_{33}^{(1)}$. Следовательно,

$$\mathcal{S}_1=\begin{pmatrix}S_{11}^{(1)}&S_{12}^{(1)}&S_{13}^{(1)}\\0&S_{22}^{(1)}&S_{23}^{(1)}\\0&0&S_{11}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1&U_2&U_3\\0&U_4&U_5\\0&0&U_1\end{pmatrix}.$$

Рассматривая второе равенство, получаем:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_2\mathcal{S}_2=\left(S_3^{(2)}\ 0\ 0\right)^T,\ \text{откуда},\ \mathcal{S}_2=\left(S_1^{(2)}\ S_2^{(2)}\ 0\right).$$

Из четвертого равенства следует:

$$\mathcal{S}_4\mathcal{B}_3=(0\ \mathcal{S}_4C\ 0)\,,\ \mathcal{S}_5\mathcal{B}_1=\left(0\ 0\ S_1^{(5)}\right),\ \widetilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1=\left(0\ \widetilde{C}U_4\ \widetilde{C}U_5\right).$$

Отсюда, подставляя полученные данные в равенство $\mathcal{S}_4\mathcal{B}_3+q\mathcal{S}_5\mathcal{B}_1=\widetilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1$, имеем

$$\begin{cases}\mathcal{S}_4C=\widetilde{C}U_4\\ qS_1^{(5)}=\widetilde{C}U_5\end{cases}. \tag{2}$$

Наконец из третьего равенства получим

$$\begin{pmatrix} U_2 & U_3D + S_1^{(2)}C & qS_{11}^{(3)} \\ U_4 & U_5D + S_2^{(2)} & qS_{21}^{(3)} \\ 0 & U_1D & qS_{31}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{31}^{(3)} & S_{32}^{(3)} & S_{33}^{(3)} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & \widetilde{D}U_4 & \widetilde{D}U_5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $U_1 = U_4,\ \widetilde{D}U_4 = U_1D$, или, в силу (2),

$$\begin{cases} \mathcal{S}_4C = \widetilde{C}U_1 \\ U_1D = \widetilde{D}U_1. \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим последнее равенство системы (3). Пусть

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} \end{pmatrix}.$$

Так как $U_1D = \widetilde{D}U_1$ и в силу $d_i \in \mathbb{C},\ d_i \neq 0,\ d_i \neq d_j,\ i \neq j\ (i = 1, \ldots, 5)$, то

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое равенство системы (3).

$$\widetilde{C}U_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & T_3 & T_4 & T_5 \\ 0 & T_2 & T_3 & \widetilde{A}T_4 & \widetilde{B}T_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_4C = \begin{pmatrix} S_{11}^{(4)} & S_{12}^{(4)} & \left(S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)}\right) & \left(S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)}A\right) & \left(S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)}B\right) \\ S_{21}^{(4)} & S_{22}^{(4)} & \left(S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)}\right) & \left(S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)}A\right) & \left(S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)}B\right) \\ S_{31}^{(4)} & S_{32}^{(4)} & \left(S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)}\right) & \left(S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)}A\right) & \left(S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)}B\right) \\ S_{41}^{(4)} & S_{42}^{(4)} & \left(S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)}\right) & \left(S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)}A\right) & \left(S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)}B\right) \\ S_{51}^{(4)} & S_{52}^{(4)} & \left(S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)}\right) & \left(S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)}A\right) & \left(S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)}B\right) \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathcal{S}_4 C = \widetilde{C} U_1$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_{21}^{(4)} = S_{31}^{(4)} = S_{41}^{(4)} = S_{51}^{(4)} = S_{32}^{(4)} = S_{42}^{(4)} = S_{52}^{(4)} = S_{12}^{(4)} = 0 \\ S_{11}^{(4)} = T_1,\ S_{11}^{(4)} = T_3,\ S_{11}^{(4)} = T_4,\ S_{11}^{(4)} = T_5 \\ S_{22}^{(4)} = T_2,\ S_{22}^{(4)} = T_3,\ S_{22}^{(4)} A = \widetilde{A} T_4,\ S_{22}^{(4)} B = \widetilde{B} T_5 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T,$$

откуда, из последних двух равенств,

$$\begin{cases} TA = \widetilde{A} T \\ TB = \widetilde{B} T \end{cases}. \tag{4}$$

Допустим, что T — вырожденная матрица, тогда, очевидно, U_1 — вырожденная, откуда $\mathcal{S}_1$ — вырожденная. Но тогда $\widetilde{S}$ — тоже вырожденная матрица, что противоречит допущению о невырожденности $\widetilde{S}$. Таким образом, T — невырожденная матрица. Тогда, с учетом системы (4), получаем, что

$$(A,\ B) \sim \left(\widetilde{A},\ \widetilde{B}\right).$$

Достаточность. Пусть $(A, B) \sim \left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)$. Отсюда следует, что существует невырожденная матрица T такая, что

$$TA = \widetilde{A} T,\ TB = \widetilde{B} T.$$

Рассмотрим матрицу

$$U_1 = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

По матрице U_1 построим матрицы

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & U_1 & U_5 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix},\ \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & U_1 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix},$$

где матрица $\mathcal{S}$ (точнее, ее элементы) удовлетворяет системе (1), а матрицы $\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mathcal{B}}$ построены по матрицам $A,\ B,\ \widetilde{A},\ \widetilde{B}$, как было показано выше.

Так как матрица T — невырожденная, то, очевидно, U_1 — невырожденная, откуда, $\mathcal{S}$ — невырожденная матрица. Кроме того, поскольку матрица $\mathcal{S}$ удовлетворяет системе (1), то

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases},$$

то есть

$$(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) \sim \left(\widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mathcal{B}}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Выводы

Задача описания пар матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{A}^2 = 0,\ \mathcal{B}^3 = 0,\ \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0,\ \mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A},$$

содержит в себе задачу описания произвольной пары матриц (A, B), а, следовательно, является "дикой" задачей.

Список литературы

[1] Ахрамович М. В., Муратов М. А. *О классификации пары q-коммутирующих операторов в конечномерном линейном пространстве.* // Таврический Вестник Информатики и Математики, № 2. – 2010. – С. 17–26.

[2] Дрозд Ю. А. *Представления коммутативных алгебр.* // Функциональный анализ и его приложения, т. 6, вып. 4. – 1972. – С. 41-43.

[3] Дрозд Ю. А. *Ручные и дикие матричные задачи.* // Представления и квадратичные формы. Сборник научных трудов Института математики НАН Украины. – Киев. – 1979. – С. 39-74.

Подібність пар q-комутуючих нільпотентних матриць

В роботі доведено, що задача класифікації, з точністю до перетворення подібності, пари матриць (A, B), які задовільняють умовам:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \end{cases},$$

є "дикою" задачею.

Ключові слова: подібність матриць, невироджена матриця, "дика" задача.

A similarity of pairs of q-commuting nilpotent matrices

We prove that the problem of classification (up to a similarity transformation) the pair of matrixes (A, B) satisfying next conditions:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \end{cases},$$

is a "wild" problem.

Keywords: matrix similarity, nonsingular matrix, "wild" problem.