Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 1–9.

УДК 531.36, 517.977

Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Расмотрена задача о построении функции управления, обеспечивающей существование предельной точки $x = 0$ для всех решений $x(t)$ нелинейной системы. Предложен локальный подход к решению этой задачи в классе функций управления с переключениями в дискретные моменты времени. Полученный результат применен для модели неголономной системы с ограничениями на управления. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: управляемость, стабилизация, дискретно переключаемая обратная связь.

Введение

Задача стабилизации систем, удовлетворяющих ранговому условию достижимости, занимает одно из центральных мест в нелинейной теории управления (см. [1, 2]). Известно, что для линейных систем необходимым и достаточным условием стабилизируемости является свойство асимптотической нуль-управляемости. Развитие линейной теории позволяет использовать свойство управляемости по линейному приближению и для стабилизации широкого класса нелинейных систем. Однако в критических случаях теории устойчивости вопрос о разрешимости задачи стабилизации является весьма сложной проблемой. В работе [3] был построен содержательный пример полностью управляемой системы, которая не удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости в классе дифференцируемых функций обратной связи.

Для доказательства стабилизируемости нуль-управляемых нелинейных систем, в работе [2] были использованы функции управления с дискретно переключаемой обратной связью (sampled feedback control). Функции обратной связи с дискретными переключениями широко используются при компьютерной реализации систем управления. Решения системы дифференциальных уравнений с разрывной функцией обратной связи $v(x)$ при этом определяются в смысле "π-траекторий", т.е. фиксируется разбиение $\pi = \{t_j\}_{j\geq 0}$ временной полуоси $t \in [0, +\infty)$ и применяется кусочно-постоянное управление $u = v(x(t_j))$ на отрезке $t \in [t_j, t_{j+1}]$, где $x(t)$ – искомое решение системы дифференциальных уравнений. В отличие от работы [2], в данной статье вводится параметрическое семейство управлений вида $u = v(t, a(x(t_j)))$ на отрезках $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Для описания условий локальной управляемости используется модификация метода возврата [2].

Управляемость нелинейных систем

Пусть в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ задана система нелинейных дифференциальных уравнений с управлением:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где x – вектор состояния, u – вектор управления, точка обозначает производную по времени t, $0 \in D$, $f \in C(D \times U)$. Будем предполагать, что для любого начального значения $x_0 \in D$ и ограниченной измеримой функции $u = u(t) \in U$, $t \in [0, \tau]$, существует единственное решение $x(t)$ системы (1) на отрезке $t \in [0, \tau]$, обладающее свойством $x(0) = x_0$.

Напомним [5, с. 39], что система (1) называется *вполне управляемой*, если для любых точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ существуют положительное число τ и допустимая функция управления $u = u(t) \in U$, $t \in [0, \tau]$, при которых система (1) имеет решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(\tau) = x^{(1)}$.

Если в определении управляемости заменить область D на некоторую ε-окрестность точки $x = 0$, то получим свойство *локальной управляемости* в нуле.

Для исследования локальной управляемости предположим, что при некотором $\tau > 0$ имеется семейство функций управления $u = v(t, a) \in U$, $t \in [0, \tau]$, зависящих от параметра $a \in G \subseteq R^p$. Обозначим через $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, v(t, a)), \quad t \in [0, \tau], \tag{2}$$

$$x|_{t=0} = x_0 \in D. \tag{3}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что при всех $x_0 \in D$ и $a \in G$ выполнены условия существования, единственности и дифференцируемости по (x_0, a) решения $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши (2)–(3). Достаточные условия дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам описаны, например, в книге [6, с. 119].

В статье [7] приведен следующий результат о локальной управляемости нелинейных систем.

Утверждение 1. [7] *Пусть решение $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши* (2)–(3) *удовлетворяет условию $x(\tau; 0, v(\cdot, a^*)) = 0$ при некоторых $\tau > 0$, $a = a^* \in G$.*

Тогда, если

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a}\right)\Big|_{a=a^*} = n, \tag{4}$$

то система (1) *локально управляема в нуле.*

При проведении операций с векторами и вычислении матрицы Якоби будем считать все векторы столбцами. Ранговое условие локальной управляемости будет использовано в дальнейшем с целью синтеза управления с переключениями для системы (1).

Основной результат

Для решения задачи стабилизации нелинейных систем в работе [2] был рассмотрен класс дискретно переключаемых функций обратной связи (sampled feedback control). Распространяя этот подход на семейство функций управления $u = v(t, a)$, зависящих от времени $t \in [0, \tau]$ и параметра $a \in G \subseteq \mathbb{R}^p$, введем *разбиение* $\pi = \{t_j\}_{j \geq 0}$ полуинтервала $t \in [0, +\infty)$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \quad t_j = j\tau.$$

Если каждому вектору $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие значение параметра $a(\xi) \in G \subseteq \mathbb{R}^p$, то $a(\xi)$ будем называть *функцией переключения.*

Определение 1. Для заданных $\tau > 0$, разбиения $\pi = \{t_j\}_{j \geq 0}$, семейства управлений $v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$ назовем π-*решением* системы (1) абсолютно непрерывную на полуинтервале $[0, +\infty)$ функцию $x(t) \in D$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), v(t - t_j, a(x(t_j)))\right), \quad t \in [t_j, j_{j+1}],$$

при всех $j = 0, 1, 2, \dots$.

Если функция управления $v(t, a)$ не зависит от t, то приведенное определение задает π-траекторию системы (1) в смысле статьи [2] для случая разбиения с постоянным шагом $\tau = t_{j+1} - t_j$, $j \geq 0$.

Покажем, что при выполнении условий утверждения 1 точка $x = 0$ является ω-предельной для всех π-решений системы (1) с начальными значениями из некоторой окрестности нуля.

Утверждение 2. *Пусть решение $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши* (2)–(3) *удовлетворяет условиям*

$$x(\tau; 0, v(\cdot, a^*)) = 0, \quad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a}\right)\Big|_{a=a^*} = n, \tag{5}$$

при некоторых $\tau > 0$, $a^* \in G$. Определим функцию переключения

$$a(\xi) = a^* - \left(\left.\frac{\partial x(\tau;0,v(\cdot,a))}{\partial a}\right|_{a=a^*} \right)^+ \left(\left.\frac{\partial x(\tau;z,v(\cdot,a^*))}{\partial z}\right|_{z=0} \right) \xi. \qquad (6)$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое π-решение $x(t)$ системы (1), соответствующее разбиению $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$, семейству управлений $v(t,a)$, функции переключения (9) и начальному условию $\|x(0)\| < \varepsilon$, обладает свойством

$$\lim_{t_j \to +\infty} x(t_j) = 0. \qquad (7)$$

Матрица $\left(\left.\frac{\partial x(\tau;0,v(\cdot,a))}{\partial a}\right|_{a=a^*} \right)^+$ в формуле (9) обозначает псевдообратную матрицу [8, с. 32] к $n \times p$-матрице Якоби $J = \frac{\partial x(\tau;0,v(\cdot,a))}{\partial a}$ при $a = a^*$. Для доказательства утверждения 2 воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма 1. *Пусть при некоторых $\tau > 0$, $a^* \in G$ выполнены условия (5). Тогда для всякого $h > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$, что*

$$\|x(\tau;\xi,v(\cdot,a(\xi)))\| \leq h\|\xi\|, \quad \forall\, \xi \in D : \|\xi\| < \varepsilon, \qquad (8)$$

где функция переключения $a(\xi)$ задана формулой (9).

Доказательство. Применим формулу Тейлора для функции $\phi(\xi,a) = x(\tau;\xi,v(\cdot,a))$ в окрестности точки $(\xi,a) = (0,a^*)$ с учетом соотношений (5), (9) при $a = a(\xi)$:

$$\phi(\xi,a(\xi)) = \phi(0,a^*) + \left.\frac{\partial\phi(\xi,a)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0,\,a=a^*} \xi + \left.\frac{\partial\phi(\xi,a)}{\partial a}\right|_{\xi=0,\,a=a^*} (a(\xi)-a^*) +$$

$$+ o\left(\|\xi\| + \|a(\xi)-a^*\|\right) = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=0,\,a=a^*} \xi - \frac{\partial\phi}{\partial a}\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)^+ \left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=0,\,a=a^*} \xi + o(\|\xi\|). \qquad (9)$$

При выполнении рангового условия (5) строки матрицы Якоби $J = \left.\frac{\partial\phi(\xi,a)}{\partial a}\right|_{\xi=0,\,a=a^*}$ линейно независимы. Следовательно [9, с. 29], $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ и $JJ^+ = I$ – единичная $n \times n$-матрица. Таким образом, из представления (9) вытекает

$$x(\tau;\xi,v(\cdot,a(\xi))) = \phi(\xi,a(\xi)) = o(\|\xi\|).$$

Это означает, что для всякого $h > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ при котором

$$\|x(\tau;\xi,v(\cdot,a(\xi)))\| \leq h\|\xi\|$$

лишь только $\|\xi\| < \varepsilon$. $\square$

Для *доказательства утверждения 2* зададимся произвольным числом $h \in (0,1)$ и применим оценку (8) для π-решения $x(t)$ системы (1), соответствующего разбиению $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$, семейству управлений $v(t,a)$ и функции переключения $a(\xi)$ при начальном условии $\|x(0)\| < \varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ указано в лемме 1:

$$\|x(\tau)\| \leq h\|x(0)\|.$$

Применяя это неравенство последовательно для $t_j = j\tau$, $j = 2, 3, ...$, получим

$$\|x(t_j)\| \le h^j \|x(0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

□

Управление неголономной системой

Применим полученные результаты для исследования следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_2 \cos x_3, \\ \dot{x_2} = u_2 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u_1, \end{cases} \tag{10}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2)^T$ – вектор управления. Система (10) моделирует качение колеса по плоскости (x_1, x_2) без проскальзывания, где координата x_3 обозначает угол между плоскостью колеса и осью Ox_1 (см. напр. [10]). Переменные управления u_1 и u_2 обозначают угловую скорость поворота колеса и скорость движения центра колеса, соответственно. Будем предполагать, что управляющие воздействия могут принимать значения из дискретного множества:

$$U : u_1 \in \{-1, 0, 1\},\ u_2 \in \{0, 1\}.$$

Такое ограничение означает, что в любой момент времени t имеется возможность остановить качение ($u_2 = 0$), двигаться прямо ($u_1 = 0$, $u_2 = 1$), повернуть направо ($u_1 = -1$, $u_2 = 1$) или налево ($u_1 = 1$, $u_2 = 1$). В случае $u_2 \equiv 1$ модель (10) известна в теории управления как машина Дубинса (см. [11]).

Введем множество $G = (0, +\infty)^4 \subset \mathbb{R}^4$. Для вектора параметров $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in G$ рассмотрим полуинтервалы $S_1 = [0, a_1)$, $S_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^{j} a_i\right)$, $j = 2, 3, 4$. Определим семейство управлений $u = v(t, a)$ для системы (10) следующим образом:

$$v_1(t,a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in S_1 \cup S_3, \\ -1, & \text{если} \quad t \in S_2 \cup S_4, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4; \end{cases}$$

$$v_2(t,a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4, \end{cases} \tag{11}$$

Найдем решение задачи Коши $x(t; 0, v(\cdot, a))$ для системы (10) с управлением $u = v(t, a)$ и начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$:

$$x_3(t) = \int_0^t v_1(s,a)ds = \begin{cases} t, \quad t \in S_1, \\ 2a_1 - t, \quad t \in S_2, \\ -2a_2 + t, \quad t \in S_3, \\ 2a_1 + 2a_3 - t, \quad t \in S_4; \end{cases}$$

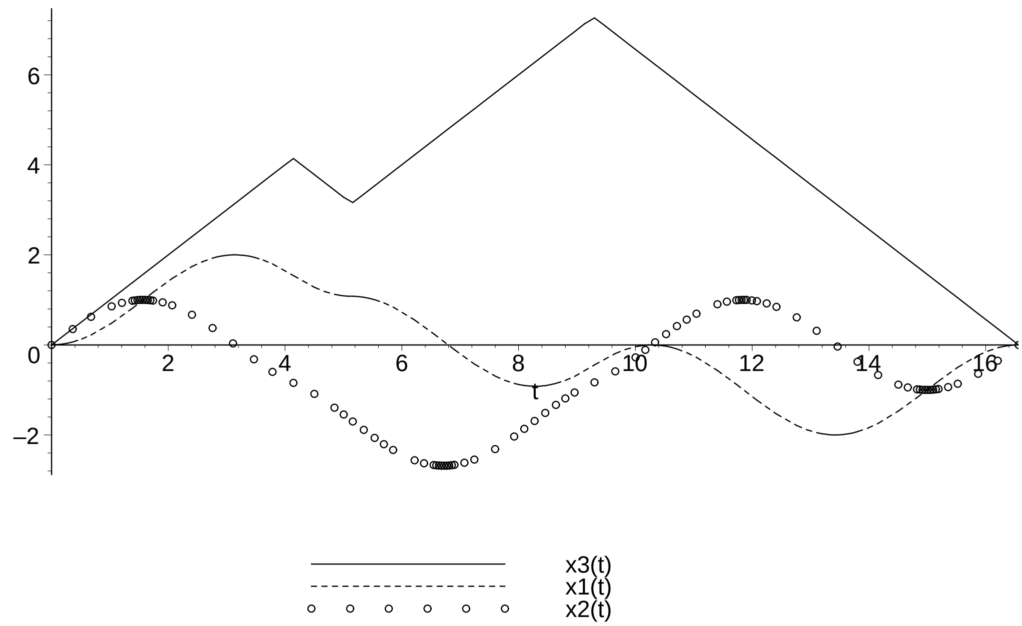

Рис. 1. Решение системы (10) с начальным условием $x(0) = 0$ и управлением $u = v(t, a^*)$.

$$x_1(t) = \int_0^t \cos x_3(s)ds = \begin{cases} \sin t,\ t \in S_1, \\ 2\sin a_1 - \sin(2a_1 - t),\ t \in S_2, \\ 2\sin a_1 - 2\sin(a_1 - a_2) - \sin(2a_2 - t),\ t \in S_3, \\ 2\sin a_1 - 2\sin(a_1 - a_2) + 2\sin(-a_2 + a_1 + a_3) - \\ \qquad - \sin(2a_1 + 2a_3 - t),\ t \in S_4; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \sin x_3(s)ds = \begin{cases} 1 - \cos t,\ t \in S_1, \\ 1 - 2\cos a_1 + \cos(2a_1 - t),\ t \in S_2, \\ 1 - 2\cos a_1 + 2\cos(2a_1 - a_2) + \cos(2a_2 - t),\ t \in S_3, \\ 1 - 2\cos a_1 + 2\cos(a_1 - a_2) - 2\cos(-a_2 + a_1 + a_3) + \\ \qquad + \cos(2a_1 + 2a_3 - t), \quad t \in S_4, \end{cases}$$

при этом $x(t) = x(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ в случае $t \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Для того, чтобы в момент времени $\tau \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ решение обращалось в нуль, нам потребуется решить систему нелинейных уравнений относительно a_1, a_2, a_3, a_4:

$$x_1(\tau) = x_2(\tau) = x_3(\tau) = 0.$$

Данная система имеет семейство решений, зависящих от параметра c:

$$a_1^* = \pi + c,\ a_2^* = c,\ a_3^* = \pi + c,\ a_4^* = 2\pi + c. \tag{12}$$

Для дальнейших вычислений положим $\tau = a_1^* + a_2^* + a_3^* + a_4^* + \delta$, $c = 1$, $\delta = 10^{-1}$. Ранг матрицы Якоби (4) равен трем при таких значениях параметров $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*$. Следовательно, система (10) локально управляема в окрестности нуля по утверждению 1. Графики координатных функций соответствующего решения $x(t; 0, v(\cdot, a^*))$ показаны на рис. 1.

Определим функцию переключения $a(\xi) = (a_1(\xi), a_2(\xi), a_3(\xi), a_4(\xi))^T$ по формуле (9) с использованием системы компьютерной алгебры:

$$a_1(\xi) = \pi + c, \ a_2(\xi) = c + \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 \sin 2c + \xi_3\right),$$

$$a_3(\xi) = \pi + c + \frac{1}{2}\left(\xi_1 - 1 - \frac{1}{2}\xi_2 \sin 2c + \xi_3\right), \ a_4(\xi) = 2\pi + c - \frac{\xi_2}{2\sin c} + \xi_3.$$

Для разбиения $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$ полуинтервала $t \in [0, +\infty)$, семейства управлений $v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$, проведем численное интегрирование системы (10) для нахождения ее π-решения $x(t)$ при следующих начальных условиях

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,5.$$

Приближенные значения координатных функций π-решения $x(t)$ приведены ниже.

	$t=0$	$t=\tau$	$t=2\tau$	$t=3\tau$	$t=4\tau$
$x_1(t)$	0,5	$-1,75\cdot 10^{-1}$	$3,16\cdot 10^{-2}$	$3,9\cdot 10^{-4}$	10^{-7}
$x_2(t)$	0,5	$2,1\cdot 10^{-1}$	$-7,8\cdot 10^{-3}$	$-2,9\cdot 10^{-4}$	$-3,8\cdot 10^{-8}$
$x_3(t)$	0,5	-10^{-9}	$-2,8\cdot 10^{-9}$	$6,98\cdot 10^{-9}$	$4,6\cdot 10^{-10}$

Поведение π-решения $x(t)$ в моменты времени $t_j = j\tau$ показано на рис. 2. Для удобства графической иллюстрации точки $x(t_j)$ соединены отрезками.

Выводы

Полученные в работе результаты развивают подход статьи [2] для стабилизации положения равновесия нелинейных систем с помошью дискретно переключаемой функции управления.

Отметим, что система (10) приводится к известному примеру Брокетта с помощью невырожденного преобразования с обратной связью для случая управлений без ограничений ($U = \mathbb{R}^2$) [1]. В свою очередь, пример Брокетта не является стабилизируемым в классе непрерывных функций управления с обратной связью (см. [3, 1]). Таким образом, использование разрывных управлений является естественным для стабилизации рассматриваемого класса систем.

Поскольку свойство (7) не дает исчерпывающего описания всех предельных точек π-решения $x(t)$, то представляет интерес для дальнейшей работы вопрос об исследовании ω-предельных множеств π-решений. Однако, для возможной практической реализации предложенного закона управления, достаточно по заданному $\Delta > 0$ определить управление с переключениями по описанной выше схеме вплоть

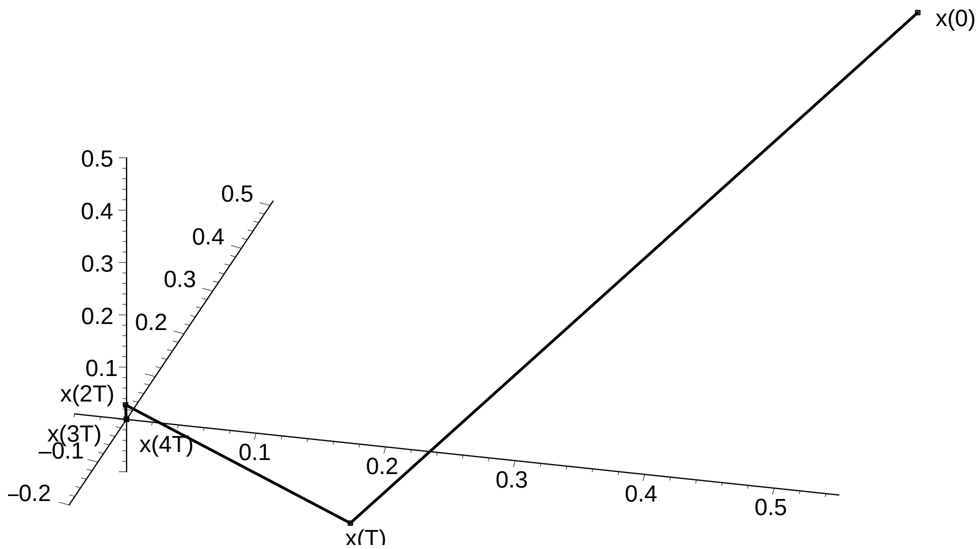

Рис. 2. π-решение системы (10) для разбиения $\pi = \{j\tau\}_{\tau \geq 0}$, семейства управлений $u = v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$.

до момента времени $t_N = N\tau$ из условия $\|x(t_N)\| < \Delta$ и положить $u_1 = u_2 = 0$ при $t \geq t_N$ в системе (10). Такое управление обеспечивает перевод системы (10) в произвольно заданную Δ-окрестность нуля за конечное время.

Список литературы

[1] Sontag E.D. *Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances* // in: Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (Proc. NATO Advanced Study Institute, Montreal). – Kluwer, 1998. – P. 551-598.

[2] Coron J.-M. *Control and Nonlinearity.* – Providence, AMS: 2007. – 426 p.

[3] Brockett R.W. *Asymptotic stability and feedback stabilization* // Differential Geometric Control Theory (R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, eds.). – Boston: Birkhäuser, 1983. – P. 181–191.

[4] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Sontag E.D., Subbotin A.I. *Asymptotic controllability implies feedback stabilization* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – P. 1394–1407.

[5] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* – М.: Наука, 1972. – 576 с.

[6] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М: Мир, 1970. – 720 с.

[7] Зуев А.Л., Чумаченко Т.Н. *Исследование локальной управляемости нелинейных систем методом возврата* // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 136–144.

[8] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[9] Алберт А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.* – М.: Наука, 1977. – 224 с.

[10] Bloch A. *Nonholonomic mechanics and control.* – New York: Springer, 2003. – 483 p.

[11] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. *Геометрическая теория управления.* – М.: Физматлит, 2004. – 392 с.

Стабілізація нелінійних систем у класі функцій керування із дискретним перемиканням

Розглянуто задачу про побудову функції керування, що забезпечує існування граничної точки $x = 0$ *для всіх розв'язків* $x(t)$ *нелінійної системи. Запропоновано локальний підхід до розв'язання цієї проблеми у класі функцій керування з перемиканнями у дискретні моменти часу. Одержаний результат застосовано до моделі неголономної системи з обмеженнями на керування. Наведено результати чисельного моделювання.*

Ключові слова: керованість, стабілізація, зворотний зв'язок із дискретним перемиканням.

Stabilization of nonlinear systems in the class of control functions with discrete switching

A problem on the construction of a control function that ensures the existence of a limit point $x = 0$ *for all solutions* $x(t)$ *of a nonlinear system is considered. A local approach to the solvability of this problem is proposed in the class of sampled controls with switching at discrete time instants. The result obtained is applied for a nonholonomic model with constraints on the control. Simulation results are presented.*

Keywords: controllability, stabilization, sampled feedback.