Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 1–7.

УДК 517.9

О. В. Анашкин, А. В. Шульгин

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача об устойчивости квадратичного разностного уравнения с постоянным запаздыванием. Коэффициенты уравнения являются почти-периодическими функциями дискретного аргумента. Исследование проводится путем построения так называемой возмущенной функции Ляпунова. Получены достаточные условия устойчивости исследуемого уравнения в виде числового индекса, формула которого показывает характер зависимости от коэффициентов уравнения и величины запаздывания.

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, критерий устойчивости, прямой метод Ляпунова.

Введение

Разностные уравнения с запаздыванием сравнительно легко сводятся к разностным уравнениям без запаздывания более высокого порядка. Но такое сведение всегда предполагает фиксацию величины запаздывания, определяющего порядок нового уравнения. Это значительно усложняет изучение зависимости свойств решений от величины запаздывания. Поэтому для уравнений с запаздыванием следует развивать специальные методы исследования.

Для исследования устойчивости разностных уравнений широко применяется метод функций Ляпунова (см., например, работы [1]–[10] и литературу в них). В настоящей статье применен метод обобщенных функций Ляпунова, развитый для неавтономных разностных уравнений с запаздыванием, записываемых в специальной форме, охватывающей все возможные типы зависимости от запаздывания [2, 3].

Получены близкие к необходимым достаточные условия устойчивости квадратичного разностного уравнения с постоянным запаздыванием и почти-периодическими коэффициентами.

Постановка задачи

Пусть $\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел, $J[a,b] \subset \mathbb{Z}$ — множество целых чисел на сегменте $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим $\mathfrak{M}_p$ пространство отображений множества $J[-p,0]$ в $\mathbb{R}^n$. Любое такое отображение определяется заданием вещественной $n \times (p+1)$-матрицы $\varphi = (\varphi(-p), \ldots, \varphi(0))$. Введем в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ норму $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : s \in J[-p,0]\}$, где $|\cdot|$ есть какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$. Для данной последовательности $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$, $k \mapsto x(k)$, обозначим $x[k]$ элемент пространства $\mathfrak{M}_p$, определенный как отрезок последовательности x: $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -p, \ldots, 0$.

Мы будем рассматривать разностные уравнения с запаздыванием, записанные в форме

$$\Delta x(k) = f(k, x[k]), \quad k = \sigma, \sigma+1, \ldots, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, функция $f : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^n$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определена в области $\mathfrak{B}_H^p = \{\|\varphi\| < H\} \subset \mathfrak{M}_p$ и существуют постоянные $M > 0$ и $d_0 > 1$ такие, что $|f(k,\varphi)| \le M\|\varphi\|^{d_0}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathfrak{B}_H^p$.

Обозначим

$$\Delta v|_{(1)}(\sigma, \varphi) = v(\sigma+1, x(\sigma,\varphi)[\sigma+1]) - v(\sigma,\varphi)$$

первую разность вперед функции $v : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^n$ *в силу уравнения* (1). Здесь $x(\sigma,\varphi)$ обозначает решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$x(\sigma,\varphi)[\sigma] = \varphi.$$

Пусть e_x есть функция-константа из пространства $\mathfrak{M}_q$, т.е. $e_x(s) = x$, для $-q \le s \le 0$. Для числовой функции $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$, $(t,\varphi) \mapsto \Phi(t,\varphi)$, обозначим

$$\widehat{\Phi}(x) = \mathcal{M}_k\{\Phi\}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k, e_x) \tag{2}$$

среднее значение функции Φ по k на $\mathbb{Z}_+$ при постоянном значении второго аргумента, если указанный предел существует. Среднее $\widehat{\Phi}$ есть числовая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, или константа, если Φ зависит только от k.

В статье рассматривается квадратичное разностное уравнение

$$\Delta x(k) = a(k)x^2(k) + b(k)x(k)x(k-h) + c(k)x^2(k-h) \tag{3}$$

с постоянным запаздыванием $h \ge 0$. Коэффициенты уравнения — почти-периодические функции вида

$$a(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \exp(i\nu k), \quad b(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} b_\nu \exp(i\nu k), \quad c(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} c_\nu \exp(i\nu k), \tag{4}$$

где $i^2 = -1$, a_ν, b_ν, c_ν — комплексные числа, причем $a_{-\nu}$ и a_ν комплексно сопряжены, то же верно и в отношении b_ν, c_ν. Предполагается, что множество $\mathcal{N}$ обладает свойствами: $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = -\mathcal{N}$, $0 \in \mathcal{N}$, множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N} + \mathcal{N}$ не содержат чисел, кратных 2π.

Если среднее $\mathcal{M}_k\{a(k)+b(k)+c(k)\}$ суммы коэффициентов уравнения (3) отлично от нуля, то легко показать, что уравнение (3) имеет неустойчивое нулевое решение. Поэтому мы предполагаем, что среднее суммы коэффициентов равно нулю

$$\mathcal{M}_k\{a(k) + b(k) + c(k)\} = \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 0.$$

Частный случай, когда $\widehat{a} = \widehat{b} = \widehat{c} = 0$, был исследован в недавней статье авторов [6]. В настоящей работе мы не накладываем никаких ограничений на индивидуальные средние $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$, кроме условия раавенства нулю их суммы.

Условия устойчивости

Далее будем использовать более компактные обозначения:

$$x' \equiv x(k+1), \quad x \equiv x(k), \quad x_h \equiv x(k-h).$$

В этих обозначениях уравнение (3) примет вид

$$\Delta x = ax^2 + bxx_h + cx_h^2. \tag{5}$$

Слегка преобразуем правую часть этого уравнения. Обозначим

$$\widetilde{a} = a - \widehat{a}, \quad \widetilde{b} = b - \widehat{b}, \quad \widetilde{c} = c - \widehat{c}, .$$

Теперь правую часть (5) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} ax^2 + bxx_h + cx_h^2 = \\ = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + (\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c})x_h^2 + \widehat{a}(x^2 - x_h^2) + \widehat{b}x_h(x - x_h) = \\ = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + [\widehat{a}(x + x_h) + \widehat{b}x_h](x - x_h). \end{aligned} \tag{6}$$

Принимая во внимание (6) и равенство

$$x - x_h = \sum_{s=1}^{h} \Delta x_s = \sum_{s=1}^{h} (ax_s^2 + bx_sx_{s+h} + cx_{s+h}^2), \tag{7}$$

запишем уравнение (5) в виде

$$\Delta x = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + [\widehat{a}(x + x_h) + \widehat{b}x_h] \sum_{s=1}^{h} (ax_s^2 + bx_sx_{s+h} + cx_{s+h}^2). \tag{8}$$

Таким образом мы видим, что главные в малой окрестности нуля фазового пространства $\mathfrak{M}_q$ $(q > 2h)$ уравнения (8) квадратичные слагаемые в правой части (8) имеют коэффициенты $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ с нулевым средним. Поэтому после приведения уравнения (5) к виду (8) мы можем воспользоваться рассуждениями работы [6].

Обозначим

$$\widetilde{A}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{a}(s),\quad \widetilde{B}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{b}(s),\quad \widetilde{C}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{c}(s). \tag{9}$$

Чтобы получить условие, при котором нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво, возьмем за основу конструкции подходящей функции Ляпунова квадратичную функцию $V_0=x^2/2$. Вычисляя первую разность функции V_0 в силу уравнения (8), получим

$$\Delta V_0|_{(8)}=\widetilde{a}x^3+\widetilde{b}x^2x_h+\widetilde{c}xx_h^2+\frac{(\Delta x)^2}{2}+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)=$$

$$=\Phi_0(k,x[k])+\frac{(\Delta x)^2}{2}+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2). \tag{10}$$

Среднее $\widehat{\Phi}_0(x_0)=0$. Для уничтожения в (10) слагаемого $\Phi_0(k,x[k])$ с нулевым средним построим возмущенную функцию [6]

$$V_1(k,x[k])=V_0(x(k))+u(k,x[k]),$$

где возмущение $u(k,x[k])$ имеет такую же структуру как и $\Phi_0(k,x[k])$:

$$u(k,x[k])=-\left[\widetilde{A}'x^3+\widetilde{B}'x^2x_h+\widetilde{C}'xx_h^2\right].$$

При таком выборе коэффициентов возмущения $u(k,x[k])$ получим

$$\Delta V_1|_{(8)}=\frac{(\Delta x)^2}{2}-\widetilde{A}'\Delta(x^3)-\widetilde{B}'\Delta(x^2x_h)-\widetilde{C}'\Delta(xx_h^2)+$$

$$+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2). \tag{11}$$

Оставляя в выражениях для первых разностей в правой части последней формулы, только одночлены наименьшей (4-й) степени, получим

$$\Delta V_1|_{(8)}=\Phi_1(k,x[k])+\ldots=$$

$$=\frac{(\Delta x)^2}{2}-\left[3\widetilde{A}'x^2\Delta x+\widetilde{B}'(2xx_h\Delta x+x^2\Delta x_h)+\widetilde{C}'(2xx_h\Delta x_h+x_h^2\Delta x)\right]+$$

$$+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)+\ldots. \tag{12}$$

Учетывая, что среднее (2) выражения

$$x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)$$

равно нулю, получим такую же формулу для среднего $\mathcal{M}_k\{\Phi_1(k, e_{x_0})\}$, что и в частном случае, рассмотренном в [6]:

$$\mathcal{M}_k\{\Phi_1(k, e_{x_0})\} = x_0^4\mathcal{I} = x_0^4\mathcal{M}_k\bigg\{\frac{(a+b+c)^2}{2} - \\ - (3\widetilde{A}' + 2\widetilde{B}' + \widetilde{C}')(a+b+c) - (2\widetilde{C}' + \widetilde{B}')(a_h + b_h + c_h)\bigg\}. \quad (13)$$

Из теорем об устойчивости, приведенных в [6] следует, что характер устойчивости нулевого решения уравнения (3) определяется знаком *индекса устойчивости* $\mathcal{I}$: при $\mathcal{I} < 0$ нулевое решение асимптотически устойчиво, при $\mathcal{I} > 0$ — неустойчиво.

В [6] получена явная формула зависимости индекса устойчивости $\mathcal{I}$ от коэффициентов разложений и запаздывания h, если функции a, b, c имеют вид (4):

$$\mathcal{I} = -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu + b_\nu + c_\nu|^2 - \\ -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}(|b_\nu|^2 + 2|c_\nu|^2)\frac{\cos(\nu(h+1)/2)\sin(\nu h/2)}{\sin(\nu/2)} + \\ + \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu\neq 0}[(a_{-\nu} + c_{-\nu})b_\nu + 2(a_{-\nu} + b_{-\nu})c_\nu]\,\frac{1-e^{i\nu h}}{1-e^{-i\nu}}. \quad (14)$$

Из этой формулы следует, что слагаемые, образующие правую часть уравнения (5), по-разному влияют на устойчивость. Важнейшую роль в стабилизации нулевого решения играет первое слагаемое, не зависящее от запаздывания. В указанных предположениях уравнение (5) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение при любом запаздывании и любых коэффициентах b и c, если $\sum_{\nu\in\mathcal{N}}|a_\nu|^2$ достаточно велика. Неустойчивость нулевого решения имеет место только при наличии запаздывания h.

Чем же отличается общий случай, расмотренный в настоящей работе, от частного случая [6]? Анализируя доказательства теорем об устойчивости, опубликованные в [2, 3]. можно заметить, что максимум абсолютной величины среднего значения коэффициентов рассматриваемого уравнения существенно влияет на величину области притяжения асимптотически устойчивого нулевого решения в случае отрицательности индекса устойчивости. Это наблюдение полностью подтверждается вычислительными экспериментами, которые проводились с конкретными уравнениями вида (5). С увеличением максимума абсолютных величин индивидуальных средних $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ область притяжения уменьшается. Детальному анализу численных экспериментов авторы планируют посвятить отдельную статью.

Заключение

В работе используется метод исследования устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием, основанный на построении обобщенной функции Ляпунова. Найдены условия устойчивости (13) для скалярного квадратичного уравнения с почти-периодическими коэффициентами и постоянным запаздыванием в общем случае произвольных средних значений коэффициентов уравнения. Полученные условия устойчивости близки к необходимым, т.к. вывод об устойчивости не удается сделать только в исключительных случаях, когда выражение для индекса устойчивости (14) обращается в нуль.

Список литературы

[1] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости для одного класса разностных уравнений / О.В. Анашкин // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 46–52.

[2] Анашкин О.В. Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, No. 7. – С. 976–978.

[3] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости для одного класса нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Ученые записки ТНУ, серия матем., мех., информатика и кибернетика. – 2006. – Т.19(58), No.2. – С. 12-19.

[4] Анашкин О.В. Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин, Й. Диблик // Динамические системы. – 2007. – Вып. 23. – С. 113–122.

[5] Богданов А.Ю. Исследование устойчивости почти-периодической дискретной системы на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных уравнений / А.Ю. Богданов // Матем. моделирование. – 2009. – Т.21, No.1. – С. 25–32.

[6] Шульгин А.В. О реализации алгоритма исследования устойчивости разностного уравнения на языке компьютерной алгебры MAXIMA / А.В. Шульгин, О.В. Анашкин // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 151–160.

[7] Diblik J. Combination of Liapunov and retract methods in the investigation of the asymptotic behavior of solutions of systems of discrete equations / J. Diblik , I. Hlavickova // Dynam. Systems Appl. – 2009. – V.18, No. 3-4. – P.507–537.

[8] Diblik J. Khusainov D. Ya., Grytsay I. V., Šmarda, Z. Stability of nonlinear autonomous quadratic discrete systems in the critical case / J. Diblik, D. Ya. Khusainov, I. V. Grytsay, Z. Šmarda // Discrete Dyn. Nat. Soc., 2010, Article ID 539087, 23 p.

[9] Grytsay I.V. Instability of a zero solution of the difference system with the quadratic right-hand side / I. V. Grytsay, T. D. Khusainov // Stud. Univ. Žilina, Math. Ser., 2003. – V. 17, No. 1. – F. 87-92.

[10] Zhang S. A New Razumikhin Theorem for Delay Difference Equations / S. Zhang, M.-P. Chen // Computers and mathematics with applications. – 1998. – V. 36. – P. 405–412.

Вплив запізнення на стійкість квадратичного різницевого рівняння

Розглядається задача про стійкість квадратичного різницевого рівняння з постійним запізненням. Коефіцієнти рівняння є майже-періодичними функціями дискретного аргументу. Дослідження проводиться шляхом побудови так званої збуреної функції Ляпунова. Отримано достатні умови стійкості досліджуваного рівняння у вигляді числового індексу, формула якого показує характер залежності від коефіцієнтів рівняння і величини запізнення.

Ключові слова: різницеві рівняння із запізненням, крітерій стійкості, прямий метод Ляпунова.

Influence of delay on stability of the quadratic difference equation

The problem of stability of a quadratic difference equation with constant delay is considered. Coefficients of the equation are quasi-periodic functions of a discrete argument. The study is carried out by constructing the so-called perturbed Lyapunov function. We obtain sufficient conditions for stability of the equation in the form of a numeric index, a formula which shows the dependence on coefficients and the magnitude of the delay.

Keywords: delay difference equations, stability criterion, Lyapunov's direct method.